Question de cours. Que peut-on dire des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes.

Exercice.

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E et $Q \in K[X]$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ le spectre de u.
   (a) Montrer que si u est diagonalisable alors $Q(u)$ est diagonalisable.
   (b) Montrer que $Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_p)\}$
2. (a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$. Montrer que $\chi_B(A) \neq 0$.
   (b) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ défini par

   $$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$$

   Montrer que si $M \in ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors

   $$Q(A)M = MQ(B)$$

   (c) En déduire que $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists! M \in M_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer deux caractérisations de la trigonalisabilité et une caractérisation de la diagonalisabilité d'un endomorphisme en termes de polynômes d'endomorphismes.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \simeq End(\mathbb{C}^n)$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que les vecteurs propres communs à A et B sont dans $ker(C)$.
2. Montrer que $ker(C) \neq \{0\}$.
3. Montrer que $ker(C)$ est stable par A et B.
4. On note A' (respectivment B') l'endomorphisme induit par la restriction de A (respectivement B) à $ker(C)$. Montrer que A' et B' admettent un vecteur propre commun.
5. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
6. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables.

Exercice.

1. Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$.
2. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

   On pourra commencer par le cas $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = 1 = \sum_{i=1}^{n} b_i^q$
3. En déduire que $\|\cdot\|_p : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, A et B deux polynômes à coefficients dans K, $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. Montrer que $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. Montrer que $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.
4. Montrer que $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E. Que peut-on dire du polynôme caractéristique de $u_{|F}$? Le démontrer.

Exercice. On considère E le sous-espace vectoriel des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$
Déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Exercice. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et non diagonalisable puis, en notant $u = u_A$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que dans la base canonique e de $\mathbb{R}^3$, $Mat_e(u) = A$, déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_v(u)$ soit triangulaire supérieure.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche