Question de cours. Tracer la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ avec ses éléments remarquables, domaine de définition, dérivabilité et dérivée.

Question de cours. Montrer que $e^x \geq x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Etudier le cas d'égalité.

Question de cours. Montrer que toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Exercice. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{x^3+1}{3} \in \mathbb{R}$ et la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet trois solutions.
2. Etudier le signe de $x \longmapsto f(x) - x$ ainsi que la monotonie de la fonction f.
3. Préciser le comportement de la suite u en fonction de u_0.

Question de cours. Tracer la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ avec ses éléments remarquables, domaine de définition, dérivabilité et dérivée.

Question de cours. Montrer que $\ln(x) \leq x-1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Etudier le cas d'égalité.

Question de cours. Donner un exemple d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de plus grand élément. Le prouver.

Exercice. On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression réelle de u_n en fonction de n.

Exercice. On considère la fonction $f : x \longmapsto x e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. On pose $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Etudier la continuité de la fonction f.
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction f en incluant les différentes limites. En déduire l'allure du graphique de la fonction f.

Question de cours. Tracer la fonction $x \longmapsto \tan(x)$ avec ses éléments remarquables, domaine de définition, dérivabilité et dérivée.

Question de cours. Réaliser l'étude complète de la fonction $x \longmapsto \ln(\sqrt{x^2 - 3x + 2})$.

Question de cours. Montrer que tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un nombre premier comme diviseur.

Exercice. On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de u_n et de v_n en fonction de n. On pourra étudier la suite $u - v$.

Exercice. On considère les propositions suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(n) : \text{"}3 \mid 4^n - 1\text{"}, \quad Q(n) : \text{"}3 \mid 4^n + 1\text{"}.$$

1. Montrer que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ et que $Q(n) \Longrightarrow Q(n+1)$.
2. Que peut-on dire de la véracité des propositions $P(n)$ et $Q(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html