Question de cours. Une population est atteinte d'un virus. On sait que la proportion de personnes atteintes est 10^{-4}. Un test de dépistage a été mis au point. Les expérimentations ont permis de savoir que les probabilités que l'individu soit détecté positif s'il est atteint ou s'il ne l'est pas sont respectivement égales à $0,99$ et à $0,001$. Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité que l'individu soit effectivement atteint ?

Réponse. On note P l'événement "le test est positif" et A l'événement "l'individu est atteint". Alors

$$\mathbb{P}(A) = 10^{-4}, \quad \mathbb{P}(P \mid A) = 0,99, \quad \mathbb{P}(P \mid A^c) = 0,001.$$

Alors

$$\mathbb{P}(A \mid P) = \frac{\mathbb{P}(A \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(P \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(P \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(P \mid A^c)\mathbb{P}(A^c)}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(A \mid P) = \frac{\frac{99}{100}\frac{1}{10000}}{\frac{99}{100}\frac{1}{10000} + \frac{1}{1000}\frac{9999}{10000}} = \frac{990}{990 + 9999} \simeq \frac{1000}{11000} = \frac{1}{11} \simeq 0,09.$$

Exercice. On considère n expériences Bernoulli indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, la probabilité de succès de la k-ième expérience vaut $\dfrac{1}{2k+1}$. On note p_n la probabilité que le nombre de succès obtenus aux n premières expériences soit pair.

1. Déterminer p_0, p_1 et p_2.
2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$p_n = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Réponse.

1. Nous avons $p_0 = 1$ car avec 0 expérience nous avons 0 succès qui est pair. Puis
$$p_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
car avec 1 expérience la seule possibilité pour avoir un nombre pair de succès est d'en avoir 0. Puis
$$p_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$
car pour avoir un nombre pair de succès il faut en avoir 0 ou 2.

2. Pour $n \geq 2$, avoir un nombre pair de succès lors des n expériences dépend si le nombre de succès au $n-1$ premières expérience est pair ou non. S'il est pair alors la n-ième expérience doit être un échec et s'il est impair alors la n-ième expérience doit être un succès. Donc
$$p_n = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)p_{n-1} + \frac{1}{2n+1}(1 - p_{n-1}) = \frac{2n-1}{2n+1}p_{n-1} + \frac{1}{2n+1}.$$
De même
$$\frac{2-1}{2+1}p_0 + \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3} = p_1.$$

3. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Nous avons bien pour l'initialisation
$$p_0 = 1 = \frac{0+1}{2 \times 0 + 1}.$$
Puis on suppose le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, d'après la question précédente,
$$p_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+3}p_n + \frac{1}{2n+3} = \frac{2n+1}{2n+3}\frac{n+1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} = \frac{n+1+1}{2(n+1)+1}.$$
Le théorème de récurrence permet donc de conclure.

Exercice. On considère un entier $n \geq 2$ et on suppose que n passagers montent successivement dans un avion de n places. Le premier prend une place au hasard. Ensuite, pour chaque $k \in \{1, ..., n\}$, le passager k s'assoit à la place k si elle est libre et choisit une place au hasard si la place k est occupée. On note p_k la probabilité que le k-ième passager s'assoit à la place k.

1. Montrer que $p_n = \dfrac{1}{n}\left(1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1}\right)$.

2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ est constante et donner cette constante.

Réponse.

1. On note A_n l'événement "le n-ième passager s'assoit à la place n" et on considère le système complet d'événements B_k : "le premier passager s'assoit à la place k" pour $k \in \{1, ..., n\}$. Alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
p_n &= \mathbb{P}(A_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_n \mid B_k)\mathbb{P}(B_k) \\
&= \mathbb{P}(A_n \mid B_1)\mathbb{P}(B_1) + \sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}(A_n \mid B_k)\mathbb{P}(B_k) + \mathbb{P}(A_n \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) \\
&= 1 \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}(A_n \mid B_k) + 0
\end{aligned}$$

   avec, pour tout $k \in \{2, ..., n-1\}$,

$$\mathbb{P}(A_n \mid B_k) = \mathbb{P}(A_{n-k+1}) = p_{n-k+1}$$

   car si le premier passager s'assoit à la place k alors les passagers de 2 à $k-1$ s'assoient à leur place, le passager k s'assoit au hasard et on est revenu à la situation de placer $n-k+1$ passagers. Par conséquent on obtient la formule souhaitée.

2. Nous avons également

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k+2}\right) \\
&= \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=3}^{n} p_{n-k+2}\right) + \frac{1}{n+1}p_n \\
&= \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1}\right) + \frac{1}{n+1}p_n \\
&= \frac{n}{n+1}p_n + \frac{1}{n+1}p_n \\
&= p_n.
\end{aligned}$$

   Donc la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ est constante égale à $p_2 = \dfrac{1}{2}$.

Question de cours. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 à chaque lancé est de $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100. On obtient 6. Quelle est la probabilité p_1 que le dé soit pipé ?
2. On tire un dé au hasard parmi les 100 et on tire n fois de suite et on obtient 6 à chaque lancer. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter.

Réponse.

1. On note P l'événement "le dé est pipé" et S l'événement "le résultat est 6". Alors
$$p_1 = \mathbb{P}(P \mid S) = \frac{\mathbb{P}(P \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S \mid P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S \mid P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S \mid P^c)\mathbb{P}(P^c)}.$$
Ainsi
$$p_1 = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$
2. On note S_i l'événement "le résultat du i-ième lancer est 6" pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Alors
$$p_n = \mathbb{P}(P \mid S_1 \cap ... \cap S_n).$$
Donc, en supposant que les lancers sont indépendants,
$$p_n = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap ... \cap S_n \mid P)\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(S_1 \cap ... \cap S_n \mid P)\mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(S_1 \cap ... \cap S_n \mid P^c)\mathbb{P}(P^c)} = \frac{\frac{1}{2^n}\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n}\frac{1}{4} + \frac{1}{6^n}\frac{3}{4}} = \frac{6^n}{6^n + 3 \times 2^n}.$$
3. Nous avons
$$p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi, plus on obtient de 6 plus on a de chances que le dé soit truqué et si l'on obtient une infinité de 6 alors on est sûr que le dé est truqué.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, ..., n\}$. Pour tout entier $m \in \{1, ..., n\}$, on note A_m l'événement "m divise x" et on note également B l'événement "x est premier avec n". Enfin on note $p_1, ..., p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des $A_{p_k}, 1 \leq k \leq r$.
2. Soit $m \in \{1, ..., n\}$ tel que $m \mid n$. Calculer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. Montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$.
5. On note $\phi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Réponse.

1. Nous avons x premier avec n si et seulement si x est premier avec $p_1, ..., p_r$ i.e. si seulement si $p_1, ..., p_r$ ne divise pas x. Donc
$$B = A_{p_1}^c \cap ... A_{p_r}^c.$$

2. Nous avons $n = km$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\{1, ..., n\} = \{1, ..., m, m+1, ..., 2m, 2m+1, ..., km\}.$$

Ainsi m divise x si et seulement si x est un multiple de m. Par conséquent, par équiprobabilité, la probabilité est le nombre de cas favorables divisé par le nombre total de cas i.e.

$$\mathbb{P}(A_m) = \frac{k}{n} = \frac{1}{m}.$$

3. Soient $q_1, ...q_s \in \{p_1, ..., p_r\}$ distincts. Alors, comme les $q_1, ..., q_s$ sont premiers distincts,

$$A_{q_1} \cap ... \cap A_{q_s} = A_{q_1 ... q_s}.$$

Or $q_1, ..., q_s$ et $q_1 ... q_s$ divisent n. Donc, d'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(A_{q_1} \cap ... \cap A_{q_s}) = \frac{1}{q_1 ... q_s} = \mathbb{P}(A_{q_1}) ... \mathbb{P}(A_{q_s}).$$

Par conséquent les $A_{p_1}, ..., A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

4. Nous avons alors les $A_{p_1}^c, ..., A_{p_r}^c$ mutuellement indépendants également et, d'après la première question,

$$\mathbb{P}(B) = \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

5. Par équiprobabilité $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\phi(n)}{n}$, d'où le résultat avec la question précédente.

Exercice. On considère une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble Ω et A et B deux événements.

1. On suppose que $A \cap B = \varnothing$. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}.$$

2. Montrer que l'inégalité précédente est vérifiée même si $A \cap B \neq \varnothing$.

Réponse.

1. Dans ce cas nous avons $B \subset A^c$ d'où $\mathbb{P}(B) \leq 1 - \mathbb{P}(A)$. Ainsi

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) \leq \frac{1}{4}$$

par étude de la fonction $x \longmapsto x(1-x)$ sur $[0, 1]$.

2. On considère $A' = A \backslash (A \cap B)$. Ainsi

$$A = A' \sqcup (A \cap B), \quad A' \cap B = \varnothing$$

et

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A') + \mathbb{P}(A \cap B))\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B)|$$

avec, d'après ce qui précède,

$$0 \leq \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$$

et

$$0 \leq \mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) \leq \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(B)) \leq \frac{1}{4}.$$

Donc

$$-\frac{1}{4} \leq \mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B) \leq \frac{1}{4}$$

et

$$|\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Question de cours. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 noires. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes (et aussi dans les urnes).

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne où elle provient.
- Si la boule était blanche alors le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 et si elle était noire alors il se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n-ième tirage est blanche" et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Montrer que $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la valeur de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse.

1. On note A_n l'événement "l'urne choisie est U_1 au n-ième tirage". Alors $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après la formule des probabilité totales,
$$p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 \mid A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_1 \mid A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{2}{5}\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\frac{1}{2} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons $A_{n+1} = B_n$. Ainsi
$$p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n^c)\mathbb{P}(B_n^c) = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n).$$
Donc
$$p_{n+1} = \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{7}\right)p_n + \frac{4}{7} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$
3. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique dont le point fixe est donné par $c = -\frac{6}{35}c + \frac{4}{7}$ i.e.
$$c = \frac{35}{41}\frac{4}{7} = \frac{20}{41}.$$
On considère alors la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $q_n = p_n - c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$q_{n+1} = p_{n+1} - c = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7} - \left(-\frac{6}{35}c + \frac{4}{7}\right) = -\frac{6}{35}q_n.$$
Donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$q_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} q_1 = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right).$$
Donc
$$p_n = q_n + c = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1}\left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) + \frac{20}{41}.$$

Exercice. On considère trois événements A, B, C.

1. Exprimer $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)$ en fonction de $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{C}, \mathbb{P}(A\cap B), \mathbb{P}(B\cap C), \mathbb{P}(A\cap C)$ et $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$.
2. On dispose de trois composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement p_1, p_2 et p_3, et de fonctionnements totalement indépendants les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit

- si les composants sont disposés en série.
- si les composants sont disposés en parallèle.
- si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Réponse.

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap C \cap B \cap C) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

2. On note F l'événement "le circuit fonctionne". Alors dans les différents cas nous avons :

   - $F = A \cap B \cap C$ et, par indépendance, $\mathbb{P}(F) = p_1 p_2 p_3$.
   - $F = A \cup B \cup C$ et, d'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(F) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_2 p_3 - p_1 p_3 + p_1 p_2 p_3.$$

   - $F = A \cap (B \cup C)$ et, par indépendance,

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap A \cap C) = p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3.$$

Exercice. On considère un entier $n \geq 3$ et une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets). On munit le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

1. Préciser le cardinal $|\Omega|$.

2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui commencent par 1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

3. On note B l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" (les boules $1, 2, 3$ sortent à la suite et dans cet ordre). Calculer $\mathbb{P}(B)$. Quelle est la limite de cette quantité quand n tend vers $+\infty$?

4. On note C l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaisse avant 2 et tels que 2 apparaisse avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3). Calculer $\mathbb{P}(C)$.

Réponse.

1. Les cas favorables commencent par 1 et sont suivis d'un $n-1$-uplet d'éléments dans $\{2, ..., n\}$. Ainsi il y a exactement $(n-1) \times ... \times 2 \times 1 = (n-1)!$ cas favorables. Donc, comme la probabilité est uniforme

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

   Autrement dit les cas favorables ne dépendant que du premier tirage qui a une probabilité $\frac{1}{n}$ d'être la boule 1.

2. Pour tout $i \in \{1, ..., n-2\}$, on note B_i l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "$1, 2, 3$" avec 1 en i-ième position. Alors

$$B = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n-2} B_i$$

   et pour tout $i \in \{1, ..., n-2\}$, $|B_i| = (n-3)!$ car il faut et il suffit de choisir un $n-3$-uplet dans $\{4, ..., n\}$ pour déterminer un élement de B_i. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

3. Pour tous $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ tels que $i < j < k$, on note $C_{i,j,k}$ l'ensemble de tous les tirages qui contiennent 1 en i-ième position, 2 en j-ième position et 3 en k-ième position. Alors

$$C = \bigsqcup_{1 \leq i < j < k \leq n} C_{i,j,k}$$

et $|C_{i,j,k}| = (n-3)!$. Donc

$$|C| = (n-3)!|\{(i,j,k) \in \{1, ..., n\}^3,\ i < j < k\}| = (n-3)!\binom{n}{3} = \frac{n!}{6}$$

car choisir un tel triple triplet revient à choisir trois éléments parmi n. Donc $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$. On peut aussi écrire que $\Omega = C_{(1,2,3)} \sqcup C_{(1,3,2)} \sqcup C_{(2,1,3)} \sqcup C_{(2,3,1)} \sqcup C_{(3,1,2)} \sqcup C_{(3,2,1)}$ avec $C_{(1,2,3)} = C$ et $C_{(1,3,2)}$ l'ensemble des tirages où $1, 2$ et 3 apparaissent dans cet ordre par exemple. Ces ensembles ont le même cardinal par permutation.