Question de cours. Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

$$F \oplus G = F + G \quad \Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Réponse. On procède par double implications.

- On suppose que $F \oplus G = F + G$. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = x + 0_E = 0_E + x$ avec $x \in F$ et $x \in G$. Donc, par unicité de la décomposition, $x = 0_E$.
- Réciproquement on suppose que $F \cap G = \{0_E\}$. Soient $y_1, y_2 \in F$ et $z_1, z_2 \in G$ tels que $y_1 + z_1 = y_2 + z_2$. Alors $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$ avec $y_1 - y_2 \in F$ et $z_2 - z_1 \in G$. Donc $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in F \cap G = \{0_E\}$. Ainsi $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$. Par conséquent $F + G = F \oplus G$.

Question de cours (Série 2)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'une famille $(P_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$ telle que $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Réponse. Soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$ tel que $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrons que cette famille est libre et génératrice.

- Soient $(i_1, ..., i_r) \in \mathbb{N}^r$ et $(\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_r}) \in \mathbb{K}^r$ tels que

  $$0 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{i_k} P_{i_k}.$$

  Alors, par unicité des coefficients d'un polynôme et comme $\deg(P_{i_1}) < ... < \deg(P_{i_r}) = i_r$, le coefficient de degré i_r est donné par $0 = \lambda_{i_r} a_{i_r,r}$. Donc $\lambda_{i_r} = 0$. Puis, par itérations successives, on en déduit que $\lambda_{i_k} = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., r\}$.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n = \deg(P)$. Alors $(P_0, ..., P_n)$ est une famille libre de $n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$. Donc c'est une base. Ainsi, comme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$. Ainsi $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$.

Question de cours (Série 2 bis)**.** Enoncer et démontrer le théorème de la base extraite.

Réponse. De toute famille génératrice finie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (non réduit à $\{0\}$), on peut extraire une base de E. Soit $(x_i)_{1\le i\le n} \in E^n$ une famille génératrice de E. On considère

$$A = \{I \subset \{1, ..., n\},\ \text{Vect}((x_i)_{i\in I}) = E\}$$

et

$$C = \{|I|,\ I \in A\}.$$

Alors C est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc admet un plus petit élément

$$m = \min C = \min\{|I|,\ I \in A\}.$$

En particulier il existe $I \in A$ tel que $|I| = m$. Montrons que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E. Il s'agit d'une famille génératrice car $I \in A$. On suppose par l'absurde que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée. Alors il existe $i_0 \in I$ et $(\lambda_i)_{i\in I, i\neq i_0} \in \mathbb{K}^{I\setminus\{i_0\}}$ tel que

$$x_{i_0} = \sum_{i\in I, i\neq i_0} \lambda_i x_i.$$

Donc

$$E = \text{Vect}(x_i)_{i\in I} = \text{Vect}(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}.$$

Ainsi $I\setminus\{i_0\} \in A$. En particulier

$$|I| - 1 = |I\setminus\{i_0\}| \ge \min C = |I|$$

ce qui est absurde. Par conséquent la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Exercice. On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, C le sous-ensemble des fonctions croissantes et

$$\Delta = \{f - g,\ (f, g) \in C^2\}.$$

1. Est-ce que C est un sous-espace vectoriel de E ?

2. Même question pour Δ.

Réponse.

1. La fonction $x \longmapsto x$ est dans C mais pas son opposée $x \longmapsto -x$. Donc C n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

2. On vérifie les différentes propriétés des sous-espaces vectoriels.
   - $0_E = 0_E - 0_E$ avec $0_E \in C$. Donc $0_E \in \Delta$.
   - Soient $h_1, h_2 \in \Delta$. Alors il existe $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C$ tels que
   $$h_1 = f_1 - g_1, \quad h_2 = f_2 - g_2.$$
   Ainsi
   $$h_1 + h_2 = f_1 + f_2 - (g_1 + g_2)$$
   avec $f_1 + f_2, g_1 + g_2 \in C$. Donc $h_1 + h_2 \in \Delta$.
   - Soient $h \in \Delta$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors il existe $f, g \in C$ tels que $h = f - g$. Si $\lambda \geq 0$ alors $\lambda h = \lambda f - \lambda g$ avec $\lambda f, \lambda g \in C$. Sinon $\lambda < 0$ et $\lambda h = (-\lambda)g - (-\lambda)f$ avec $(-\lambda)g, (-\lambda)f \in C$. Donc, dans les deux cas, $\lambda h \in \Delta$.

Exercice. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ composée des nombres premiers rangés en ordre croissant :

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, ...$$

1. Montrer que la famille $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

2. En déduire la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Réponse.

1. Soient $r \in \mathbb{N}^*, n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}^*$ distincts et $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{Q}$ tels que
   $$0 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \ln(p_{n_k}).$$
   Or, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, il existe $p_k \in \mathbb{N}$ et $q_k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\lambda_k = \dfrac{p_k}{q_k}$. Donc, en multipliant l'égalité précédente par $q_1...q_r$, nous obtenons
   $$0 = \sum_{k=1}^{r} \left(p_k \prod_{\ell\neq k} q_\ell \right) \ln(p_{a_k}) = \ln\left(\prod_{k=1}^{r} p_{n_k}^{\alpha_k} \right)$$
   avec $\alpha_k = p_k \prod_{\ell\neq k} q_\ell$. Donc
   $$\prod_{k=1, \alpha_k<0}^{r} p_{n_k}^{\alpha_k} = \prod_{k=1, \alpha_k\geq 0}^{r} p_{n_k}^{\alpha_k}.$$
   Ainsi, par unicité de la décomposition d'un nombre en produits de nombres premiers dans $\mathbb{N}$, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, $\alpha_k = 0$. Donc, comme les q_ℓ sont non nuls, $p_k = 0$ et $\lambda_k = 0$. Par conséquent la famille est libre.

2. Ainsi $+\infty = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Vect}(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. Donc $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = +\infty$.

Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

Réponse. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

Soit maintenant $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Alors $M = M^T = -M$ i.e. $2M = 0_{n,n}$ i.e. $M = 0_{n,n}$. Par conséquent $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Question de cours (Série 2)**.** Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ distincts. Montrer que la famille des polynômes interpolateurs associée est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Réponse. La famille de ces polynômes est définie par

$$L_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}, \quad 0 \le i \le n.$$

Montrons qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_n[X]$ en montrant qu'il s'agit d'une famille libre et une famille génératrice.

- Soit $(\lambda_i)_{0\le i\le n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $0 = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i L_i$. Ainsi, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, en évaluant en a_i, on obtient $0 = \lambda_i$. Donc la famille est libre.
- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On considère $\lambda_i = P(a_i)$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$. Donc

  $$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i.$$

  Ainsi la famille est génératrice.

Question de cours (Série 2 bis)**.** Enoncer et démontrer le lemme de Steinitz.

Réponse. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Soit E un espace vectoriel. On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: pour tout $(e_i)_{1\le i\le n} \in E^n$ et $(x_i)_{1\le i\le n+1} \in (\text{Vect}(e_i)_{1\le i\le n})^{n+1}$, la famille $(x_i)_{1\le i\le n+1}$ est liée."

- Pour $n = 1$: Soient $e_1 \in E$ et $(x_1, x_2) \in (\text{Vect}(e_1))^2$.
  - Si $e_1 = 0_E$ alors $x_1 = x_2 = 0_E$ et la famille (x_1, x_2) est liée.
  - Si $e_1 \neq 0_E$ et $x_1 = 0_E$ alors (x_1, x_2) est liée.
  - Si $e_1, x_1 \neq 0_E$ alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 \neq 0, x_1 = \lambda_1 e_1$ et $x_2 = \lambda_2 e_1$. Ainsi

    $$0_E = \lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2$$

    avec $\lambda_1 \neq 0$. Donc la famille (x_1, x_2) est liée.
- On suppose le résultat vrai au rang $n - 1 \in \mathbb{N}^*$. Soient $(e_i)_{1\le i\le n} \in E^n$ et $(x_i)_{1\le i\le n+1} \in (\text{Vect}(e_i)_{1\le i\le n})^{n+1}$. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., n+1\}$, il existe $(\lambda_{i,j})_{1\le j\le n} \in \mathbb{K}^n$ tel que

  $$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} e_j.$$

  - Si $\lambda_{i,n} = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n+1\}$ alors $(x_i)_{1\le i\le n} \in (\text{Vect}(e_i)_{1\le i\le n-1})^n$. Donc, par hypothèse de récurrence, la famille $(x_i)_{1\le i\le n}$ est liée. En particulier la famille $(x_i)_{1\le i\le n+1}$ également.

– S'il existe $i_0 \in \{1,...,n+1\}$ tel que $\lambda_{i_0,n} \neq 0$ alors on considère

$$y_i = x_i - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{i_0,n}} x_{i_0}, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Alors, pour tout $i \in \{1,...,n+1\} \backslash \{i_0\}$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} e_j - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{i_0,n}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i_0,j} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_{i,j} - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{i_0,n}} \lambda_{i_0,j} \right) e_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\lambda_{i,j} - \frac{\lambda_{i,n}}{\lambda_{i_0,n}} \lambda_{i_0,j} \right) e_j.$$

Donc $(y_i)_{1 \leq i \leq n+1, i \neq i_0} \in (\mathrm{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq n-1})^n$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq n+1, i \neq i_0}$ est liée : il existe $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n+1, n \neq i_0} \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tel que

$$0_E = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \mu_i y_i = \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \mu_i x_i - \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n+1} \frac{\mu_i \lambda_{i,n}}{\lambda_{i_0,n}} x_{i_0}.$$

Ainsi la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est liée.

Exercice. On considère les sous-ensembles

$$F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{x \longmapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'ils y sont supplémentaires.

Réponse.

- Les parties F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de l'espace $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car vérifient la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
- Soit $f \in F \cap G$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

  et

  $$f(0) = f'(0) = 0.$$

  Donc

  $$0 = f(0) = b \quad \text{et} \quad 0 = f'(0) = a.$$

  Donc $f = 0$ ce qui montre que $F \cap G = \{0\}$.
- Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ et $f_0 \in F$ tels que

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f_0(x) + ax + b.$$

  Donc

  $$f(0) = b, \quad f'(0) = a \quad \text{et} \quad f_0(x) = f(x) - f'(0)x - f(0).$$

  Par conséquent nous avons

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (f(x) - f'(0)x - f(0)) + (f'(0)x + f(0)).$$

  Donc $f \in F + G$ ce qui montre que $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F + G$.
- En conclusion nous avons montré que $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et E l'espace des fonctions continues et affines par morceaux du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in [a, b]$, on note f_α la fonction de E définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad f_\alpha(x) = |x - \alpha|.$$

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in [a,b]}$ est libre dans E.

Réponse. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in [a, b]$ distincts et $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |x - \alpha_k|.$$

Quitte à réordonner les α_k, on peut supposer $a = \alpha_0 \leq \alpha_1 < .... < \alpha_n \leq \alpha_{n+1} = b$. Soit $k_0 \in \{1, ..., n\}$. Alors

$$\forall x \in [\alpha_{k_0-1}, \alpha_{k_0}], \quad 0 = \sum_{k=1}^{k_0-1} \lambda_k (x - \alpha_k) + \sum_{k=k_0}^{n} \lambda_k (\alpha_k - x)$$

et

$$\forall x \in [\alpha_{k_0}, \alpha_{k_0+1}], \quad 0 = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k (x - \alpha_k) + \sum_{k=k_0+1}^{n} \lambda_k (\alpha_k - x).$$

Donc, en dérivant, nous obtenons,

$$0 = \sum_{k=1}^{k_0-1} \lambda_k - \sum_{k=k_0}^{n} \lambda_k, \quad 0 = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k - \sum_{k=k_0+1}^{n} \lambda_k.$$

Ainsi, en effectuant la différence des égalités obtenus, $0 = 2\lambda_{k_0}$ i.e. $\lambda_{k_0} = 0$. Par conséquent la famille est libre.

Question de cours. Déterminer un supplémentaire de l'ensemble des suites qui convergent vers 0 (dans l'ensemble des suites réelles convergentes). Le démontrer.

Réponse. On note c_0 l'ensemble des suites réelles convergentes vers 0 et c l'ensemble des suites réelles convergentes. On cherche un sous-espace vectoriel F de c tel que $c = c_0 \oplus F$. Soit $u \in c$. Alors on peut considérer $\ell = \lim u \in \mathbb{R}$. Donc $u - \ell \in c_0$. Ainsi

$$u = u - \ell + \ell \in c_0 + \mathbb{R}.$$

Donc $c = c_0 + \mathbb{R}$. Soit $u \in c_0 \cap mathbbR$. Alors $u = 0$. Donc $\mathbb{R}$ est un supplémentaire de c_0 dans c.

Question de cours (Série 2). Montrer que la famille de fonctions $(t \longmapsto e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Réponse. On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: "la famille $(t \longmapsto e^{ikt})_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$".

- Pour $n = 0$ nous avons la famille réduite à la fonction $t \longmapsto 1$ qui n'est pas nulle donc forme une famille libre.
- On suppose le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k e^{ikt} = 0.$$

  En particulier, en dérivant, nous avons

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k ike^{ikt}.$$

  Donc, en combinant ces deux égalités, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

  $$0 = (n+1)\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k e^{ikt} - \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k ke^{ikt} = \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)\lambda_k e^{ikt}.$$

  Or, par hypothèse de récurrence, la famille $(t \longmapsto e^{ikt})_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $(n+1-k)\lambda_k = 0$ i.e. $\lambda_k = 0$. Par conséquent il suit que $\lambda_{n+1} = 0$ d'après la première égalité. Donc la famille $(t \longmapsto e^{ikt})_{0\leq k\leq n+1}$ est également libre dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Le théorème de récurrence permet de conclure.

Question de cours (Série 2 bis). Enoncer et démontrer le théorème de la base incomplète.

Réponse. Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base de E. Soit $(x_1, ..., x_p)$ une famille libre de E. Comme E est de dimension finie, il existe une famille génératrice $(y_1, ..., y_q)$ de E. On considère A l'ensemble des familles libres de vecteurs $(z_i)_{1\leq i\leq r}$ telles que la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ soit incluse dedans et telles que la famille $(z_i)_{1\leq i\leq r}$ soit incluse dans le famille $((x_i)_{1\leq i\leq p}, (y_i)_{1\leq i\leq q})$:

$$\forall i \in \{1, ..., p\}, \quad \exists j \in \{1, ..., r\}, \quad x_i = z_j$$

et

$$\forall i \in \{1, ..., r\}, \quad \exists z \in \{x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q\}, \quad z_i = z.$$

On considère également l'ensemble des cardinaux de ces familles

$$C = \{|a|, \quad a \in A\}.$$

Alors C est une partie non vide ($x \in A$) majorée (par $p+q$ ou même par q d'après le lemme de Steinitz) de $\mathbb{N}$. Donc admet un plus grand élément : il existe une famille libre $z \in A$ telle que $r = |z| = \min(C)$. Montrons qu'il s'agit d'une base sachant que nous savons déjà qu'il s'agit d'une famille libre. Il ne reste plus qu'à montrer le côté générateur. S'il existe $i \in \{1, ..., q\}$ tel que $y_i \notin \mathrm{Vect}(z)$ alors on peut compléter la famille z avec y_i et encore obtenir une famille libre ce qui contredit le cardinal maximal r. Donc $y_i \in \mathrm{Vect}(z)$ pour tout $i \in \{1, ..., q\}$. Par conséquent

$$E = \mathrm{Vect}(y) \subset \mathrm{Vect}(z) \subset E$$

i.e. $E = \mathrm{Vect}(z)$ i.e. la famille z engendre E.

Exercice. On considère les fonctions $c_1, c_2, s_1, s_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad c_1(x) = \cos(x), \quad c_2(x) = x\cos(x), \quad s_1(x) = \sin(x), \quad s_2(x) = x\sin(x).$$

Montrer que la famille (c_1, c_2, s_1, s_2) est une famille libre dans l'espace des fonctions réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Réponse. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad 0 = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 x\cos(x) + \mu_1 \sin(x) + \mu_2 x\sin(x).$$

En particulier en $x = 0$, $0 = \lambda_1$. Puis en $x = \pi$, $0 = -\lambda_2\pi$ i.e. $\lambda_2 = 0$. Ensuite si on dérive nous avons

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad 0 = \mu_1 \cos(x) + \mu_2 \sin(x) + \mu_2 x\cos(x).$$

Donc en $x = 0$, $0 = \mu_1$. Puis en $x = \pi$, $0 = \mu_2\pi$ i.e. $\mu_2 = 0$. Par conséquent la famille est libre.

Exercice. Montrer que les sous-ensembles

$$F = \left\{ f \in C([0, \pi], \mathbb{R}), \quad f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C([0, \pi], \mathbb{R})$.

Réponse. Il s'agit bien de sous-espaces vectoriels.

- Soit $f \in F \cap G$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(x) + b\sin(x).$$

  Donc

$$a = f(0) = \underbrace{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=b} = f(\pi) = -a.$$

  Ainsi $a = 0 = b$ puis $f = 0$ ce qui montre que $F \cap G = \{0\}$.

- Soit $f \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$. On procède par analyse-synthèse. On suppose qu'il existe $f_1 \in F$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f = f_1 + a\cos + b\sin.$$

  Donc en évaluant en 0, $\frac{\pi}{2}$ et π on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(0) & = & f_1(0) + a \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + b \\ f(\pi) & = & f_1(\pi) - a. \end{array} \right.$$

  Donc en effectuant l'opération $\frac{1}{2}(L_1 - L_3)$ nous obtenons

$$a = \frac{f(0) - f(\pi)}{2}.$$

  Puis

$$b = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f_1(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) + a = \frac{2f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) - f(\pi)}{2}.$$

  Finalement nous avons également

$$f_1 = f - a\cos - b\sin.$$

  Réciproquement on vérifie bien que la décomposition $f = f_1 + a\cos + b\sin$ convient et on obtient alors $f \in F + G$.