**Question de cours.** Soit $E$ un espace vectoriel et $F, G$ deux sous-espaces vectoriels. Montrer que

$$F \oplus G = F + G \quad \Longleftrightarrow \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

**Question de cours.** Série 2 ou série 2 bis ?

**Exercice.** On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $C$ le sous-ensemble des fonctions croissantes et

$$\Delta = \{f - g,\ (f, g) \in C^2\}.$$

1. Est-ce que $C$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ?
2. Même question pour $\Delta$.

**Exercice.** On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ composée des nombres premiers rangés en ordre croissant :

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \ldots$$

1. Montrer que la famille $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
2. En déduire la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

*https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html*

**Question de cours.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

**Question de cours.** Série 2 ou série 2 bis ?

**Exercice.** On considère les sous-ensembles

$$F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{x \longmapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'ils y sont supplémentaires.

**Exercice.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $E$ l'espace des fonctions continues et affines par morceaux du segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in [a, b]$, on note $f_\alpha$ la fonction de $E$ définie par

$$\forall x \in [a, b], \quad f_\alpha(x) = |x - \alpha|.$$

Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in [a,b]}$ est libre dans $E$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

*https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html*

**Question de cours.** Déterminer un supplémentaire de l'ensemble des suites qui convergent vers 0 (dans l'ensemble des suites réelles convergentes). Le démontrer.

**Question de cours.** Série 2 ou série 2 bis ?

**Exercice.** On considère les fonctions $c_1, c_2, s_1, s_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [0, 2\pi], \quad c_1(x) = \cos(x), \quad c_2(x) = x\cos(x), \quad s_1(x) = \sin(x), \quad s_2(x) = x\sin(x).$$

Montrer que la famille $(c_1, c_2, s_1, s_2)$ est une famille libre dans l'espace des fonctions réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**Exercice.** Montrer que les sous-ensembles

$$F = \left\{ f \in C([0, \pi], \mathbb{R}), \quad f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C([0, \pi], \mathbb{R})$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

*https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html*