Question de cours. Enoncer le développement limité de la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à l'ordre 3 en 0.

Réponse. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$ avec $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. Donc, pour $n=3$, nous obtenons

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + o(x^3) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} + o(x^3).$$

Question de cours. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan par équation différentielle.

Réponse. La fonction tan est de classe C^∞ sur $[-1,1]$ donc admet un développement limité à l'ordre 5 en 0. Or la fonction tan est impaire donc son développement limité est de la forme

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

Or $\tan' = 1 + \tan^2$ avec $\tan'$ également de classe C^∞ sur $[-1,1]$, donc son développement limité est donné par la dérivée du développement de tan :

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4) &= 1 + (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5))^2 \\ &= 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Donc, par unicité d'un développement limité, $a = 1, b = \dfrac{1}{3}$ et $c = \dfrac{2ab}{5} = \dfrac{2}{15}$. Par conséquent

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Exercice. On considère $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$ et les vecteurs f_1, f_2, f_3 et f_4 de E définis par

$$\forall x \in\ ]-1,1[, \quad f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{1-x}1+x, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Réponse. Nous avons, pour tout $x \in\ ]-1,1[$,

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) + f_4(x)$$

et de même

$$f_2(x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x).$$

Donc

$$\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \mathrm{Vect}(f_3, f_3).$$

En particulier

$$\mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \dim(\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)) = \dim(\mathrm{Vect}(f_3, f_4)) = 2$$

car la famille (f_3, f_4) est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires.

Exercice. On considère $E = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'espace vectoriel des suites réels et F le sous-espace des suites $u \in E$ telles qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. On considère $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 b_1 \neq a_1 b_0$ et les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ de premiers termes respectifs (a_0, a_1) et (b_0, b_1). Montrer que le couple $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une base de F. En déduire $\dim(F)$.

3. (a) Soit $r \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation nécessaire et suffisante (1) sur r pour que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
   (b) On suppose qu cette équation (1) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Montrer que les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F. Comment déterminer l'expression générale de $u \in F$ en fonction de r_1 et r_2 ?
   (c) On suppose que cette équation (1) admet une racine réelle double r. Montrer que les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.
   (d) On suppose que cette équation (1) admet deux racines complexes conjuguées non réelles $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Montrer que les suites $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

Réponse.

1. On vérifie que F est stable par combinaison linéaire et $0 \in F$.

2. Soit $u \in F$. On cherche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rclcl} u_0 & = & \lambda a_0 & + & \mu b_0 \\ u_1 & = & \lambda a_1 & + & \mu b_1 \end{array}\right.$$

i.e. en effectuant les opérations $a_1(1) - a_0(2)$ et $b_1(1) - b_0(2)$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a_1 u_0 & - & a_0 u_1 & = & \mu a_1 b_0 & - & \mu a_0 b_1 \\ b_1 u_0 & - & b_0 u_1 & = & \lambda a_0 b_1 & - & \lambda a_1 b_0 \end{array}\right.$$

i.e. comme $a_1 b_0 \neq a_0 b_1$

$$\lambda = \frac{b_1 u_0 - b_0 u_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, \quad \mu = \frac{a_1 u_0 - a_0 b_1}{a_1 b_0 - a_0 b_1}.$$

Puis, par récurrence double, nous obtenons $u = \lambda a + \mu b$. Nous avons également montré que le couple (λ, μ) était unique. Donc il s'agit d'une base puis $\dim(F) = 2$.

3. (a) On suppose que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. En particulier, pour $n = 0$ dans l'équation de récurrence, $r^2 = \alpha r + \beta$. Donc r vérifie l'équation du second degré (1) $x^2 - \alpha x - \beta = 0$. Réciproquement si r vérifie (1) alors $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
   (b) Nous avons $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ d'après la question précédente. Il s'agit d'une famille libre car non colinéaires car $r_1 \neq r_2$ et composée de $2 = \dim(F)$ vecteurs de F. Par conséquent il s'agit d'une base de F. Pour déterminer l'expression de $u \in F$ il faut et il suffit de résoudre le système donnée par les rangs $n = 0$ et $n = 1$.
   (c) Nous avons $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ comme précédemment. Comme r est racine double, r est également racine du polynôme dérivé $2X - \alpha$, d'où $r = \dfrac{\alpha}{2}$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} (n+2)r^{n+2} - \alpha(n+1)r^{n+1} - \beta n r^n & = & r^n((n+2)r^2 - \alpha(n+1)r - \beta n) \\ & = & r^n(n(r^2 - \alpha r - \beta) + r(2r - \alpha)) \\ & = & 0. \end{array}$$

   Donc $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$. Il s'agit d'une famille libre car non colinéaires et composée de $2 = \dim(F)$ vecteurs de F. Par conséquent il s'agit d'une base.
   (d) D'après ce qui précède, la famille $((\rho^n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n e^{-in\theta})_{n\in\mathbb{N}})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $F_\mathbb{C}$ composée des mêmes suites mais avec deux premiers termes complexes. Donc

$$(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}(\rho^n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}} + \frac{1}{2}(\rho^n e^{-in\theta})_{n\in\mathbb{N}} \in F_\mathbb{C} \cap \mathbb{R}^\mathbb{N} = F$$

   et

$$(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2i}(\rho^n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}} - \frac{1}{2i}(\rho^n e^{-in\theta})_{n\in\mathbb{N}} \in F_\mathbb{C} \cap \mathbb{R}^\mathbb{N} = F.$$

   Il s'agit d'une famille libre car non colinéaires et composée de $2 = \dim(F)$ vecteurs de F. Par conséquent il s'agit d'une base.

Question de cours. Enoncer la formule de Stirling.

Réponse. Nous avons $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Question de cours. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan par application réciproque.

Réponse. La fonction tan est impaire donc on sait que son développement limité est de la forme $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$. En particulier $\tan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Or

$$\arctan(y) \underset{y\to 0}{=} y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + o(y^5).$$

Donc

$$\begin{aligned}
x &= \arctan(\tan(x)) \\
&\underset{x\to 0}{=} \tan(x) - \frac{\tan(x)^3}{3} + \frac{\tan(x)^5}{5} + o(\tan(x)^5) \\
&= ax + bx^3 + cx^5 - \frac{1}{3}(ax + bx^3 + cx^5)^3 + \frac{1}{5}(ax + bx^3 + cx^5)^5 + o((ax + bx^3 + cx^5)^5) \\
&= ax + \left(b - \frac{a^3}{3}\right)x^3 + \left(c - a^2 b + \frac{a^5}{5}\right)x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité d'un développement limité, $a = 1$ puis $b = \frac{1}{3}$ et $c = a^2 b - \frac{a^5}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. Par conséquent

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Exercice. On considère $n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}_n[X]\backslash\{0\}$ et $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ A \mid P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}_n[X]$.
3. En déduire sa dimension.

Réponse.

1. Nous avons $A \mid 0$ car $0 = A \times 0$, d'où $0 \in F$. Maintenant pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P_1, P_2 \in F$ nous avons l'existence de $B_1, B_2 \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que $P_1 = AB_1$ et $P_2 = AB_2$. Ainsi $\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda B_1 + B_2)$, d'où $A \mid \lambda P_1 + P_2$ puis $\lambda P_1 + P_2$. Par conséquent F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Soit $B \in \mathbb{K}_n[X]$. On effectue la division euclidienne de B par A : il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que

   $$B = AQ + R, \quad \deg(R) < \deg(A).$$

   Donc, en notant $p = \deg(A)$, nous avons

   $$B = AQ + R \in F + \mathbb{K}_{p-1}[X].$$

   Soit $P \in F \cap \mathbb{K}_{p-1}[X]$. Alors il existe $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P = AQ$. Donc $p - 1 \geq deg(P) = \deg(A) + \deg(Q) = p + \deg(Q)$, d'où $\deg(Q) \leq -1$ i.e. $Q = 0$, d'où $P = 0$. Donc F et $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ sont en somme directe. Par conséquent $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Nous avons donc

   $$n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(F) + \dim(\mathbb{K}_{p-1}[X]) = \dim(F) + p$$

   i.e. $\dim(F) = n + 1 - p$.

Exercice. On considère un espace vectoriel réel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient H et H' deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$. Montrer que H et H' possèdent un sous-espace vectoriel supplémentaire commun.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer que F et G possèdent un sous-espace vectoriel supplémentaire commun.

3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) \leq \dim(G)$. Montrer qu'il existe S_F supplémentaire de F dans E et S_G supplémentaire de G dans E tels que $S_G \subset S_F$.

Réponse.

1. Si $H = H'$ alors n'importe quel supplémentaire de H convient. Sinon $H \not\subset H'$ et comme $\dim(H) = \dim(H')$, $H' \not\subset H$. Donc il existe $x \in H$ et $x' \in H'$ tels que $x \notin H'$ et $x' \notin H$. Par conséquent $x + x' \notin H$ et $x + x' \notin H'$. Donc $\mathrm{Vect}(x + x')$ est un supplémentaire commun à H et H' par argument de dimension.

2. On procède par récurrence décroissante sur $m = \dim(F) = \dim(G) \in \{0, ..., n\}$.

   - Si $m = n$ alors $\{0_E\}$ est un supplémentaire commune à $F = E$ et $G = E$.
   - Si $m = n - 1$ alors la question précédente conclut.
   - Si l'on suppose le résultat vrai au rang $m \in \{1, ..., n\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension $m - 1$. Si $F = G$ alors n'importe quel sous-espace supplémentaire de F convient. Sinon, comme précédemment, il existe $x \in F$ et $x' \in G$ tels que $x \notin G$ et $x' \notin F$. Ainsi $x + x' \notin F$ et $x + x' \notin G$. Donc $\mathrm{Vect}(x + x')$ est en somme directe avec F et avec G. Ainsi $F \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ et $G \oplus \mathrm{Vect}(x + x')$ sont de dimension $m - 1 + 1 = m$. Donc, par hypothèse de récurrence, ils admettent un supplémentaire commun S dans E. Par conséquent $\mathrm{Vect}(x + x') \oplus S$ est un supplémentaire commun à F et G dans E.

   Le théorème de récurrence permet de conclure.

3. Soit F' sous-espace vectoriel de E contenant F tel que $\dim(F') = \dim(G)$. Alors, d'après la question précédente, F' et G admettent un supplémentaire commune S_G. On considère maintenant S' un supplémentaire de F dans F' et $S_F = S' \oplus S_G$. Alors

$$E = F' \oplus S_G = F \oplus S' \oplus S_G = F \oplus S_F.$$

   Donc S_F est un supplémentaire de F dans E et $S_G \subset S_G$.

Question de cours. Enoncer la formule de Taylor-Young.

Réponse. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f est de classe C^n sur I. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Question de cours. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan par quotient.

Réponse. Nous avons $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ avec

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Or nous avons également $\dfrac{1}{1-y} \underset{y\to 0}{=} 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)} \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + (...)^3 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3\right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^5) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\
&= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{16}{120}x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).
\end{aligned}$$

Exercice. Soie $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère F la partie E définie par

$$F = \{P \times \cos + Q \times \sin,\ (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

Réponse. Nous pouvons vérifier les différentes propriétés dans la caractérisation des sous-espaces vectoriels ou écrire que $F = \phi((\mathbb{R}_n[X])^2)$ avec

$$\phi(P,Q) = P \times \cos + Q \sin, \quad (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$$

qui définit une application linéaire de $(\mathbb{R}_n[X])^2$ dans E car pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P_1,Q_1),(P_2,Q_2) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$,

$$\phi(\lambda(P_1,Q_1) + (P_2,Q_2)) = (\lambda P_1 + P_2) \times \cos + (\lambda Q_1 + Q_2) \times \sin = \lambda\phi(P_1,Q_1) + \phi(P_2,Q_2).$$

Maintenant déterminons une base du sous-espace F. On considère les familles $(f_k)_{0\le k\le n}$ et $(g_k)_{0\le k\le n}$ définies par

$$\forall k \in \{0,...,n\}, \quad f_k = X^k \times \cos, \quad g_k = X^k \times \sin.$$

Il s'agit bien de familles de F. Soit $f \in F$. Alors il existe $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$f = P \times \cos + Q \times \sin = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \times \cos + \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k + \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell g_\ell.$$

Donc la famille $((f_k)_{0 \leq k \leq n}, (g_k)_{0 \leq k \leq n})$ engendre F. Il ne reste plus qu'à montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(\mu_\ell)_{0 \leq \ell \leq n}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = \sum_{\ell=0}^{n} \mu_\ell g_\ell.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k \right) \cos(x) + \left(\sum_{\ell=0}^{n} \mu_\ell x^\ell \right) \sin(x).$$

Ainsi tous les $\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}$ sont racines du polynôme $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$. Donc ce polynôme est nul puis $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$. De même tous les $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sont des racines du polynôme $\sum_{\ell=0}^{n} \mu_\ell X^\ell$, d'où, de même, $\mu_\ell = 0$ pour tout $\ell \in \{0, ..., n\}$. Par conséquent la famille est libre puis est une base de F, d'où $\dim(F) = 2(n+1) = 2n+2$.

Exercice. On souhaite montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante : "Pour tout espace vectoriel réel E de dimension n, pour tous sous-espaces $F_1, ..., F_p$ de E tels que $E = \bigcup_{j=1}^{p} F_j$, il existe $j \in \{1, ..., p\}$ tel que $F_j = E$.".

1. Initialiser la récurrence.
2. On suppose la propriété vraie au rang $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On considère E espace vectoriel réel de dimension n et $F_1, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigcup_{j=1}^{p} F_j$.
   (a) Soit H un sous-espace de E de dimension $n-1$. Que dire de la réunion des sous-espaces vectoriels $F_j \cap H, 1 \leq j \leq p$?
   (b) Montrer que si $n \geq 2$ alors E admet un nombre infini de sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.
   (c) Conclure l'hérédité.

Réponse.

1. Si $n = 0$ alors $E = \{0\}$ et $F_j = \{0\} = E$ pour tout $j \in \{0, ..., p\}$.
2. (a) Nous avons

$$\bigcup_{j=1}^{p} (F_j \cap H) = \left(\bigcup_{j=1}^{p} F_j \right) \cap H = E \cap H = H.$$

   (b) On considère un sous-espace F de dimension $n-2 \geq 0$ et un supplémentaire S de F dans E. Soient $x, y \in S \backslash \{0_E\}$ tels que $F \oplus \mathrm{Vect}(x) = F \oplus \mathrm{Vect}(y)$. Donc $x = z + \lambda y$ avec $z \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, d'où $z = x - \lambda y \in F \cap S = \{0_E\}$ puis x et y sont colinéaires. Par contraposée si x et y ne sont pas colinéaires alors $F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et $F \oplus \mathrm{Vect}(y)$ sont deux sous-espaces vectoriels distincts de dimension $n-1$. Or il existe un nombre infini de vecteurs non colinéaires dans S (il suffit de fixer une base (e_1, e_2) de S et de considérer les vecteurs $(1-t)e_1 + te_2$ pour tout $t \in [0, 1]$), donc il existe un nombre infini de sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$.
   (c) Par hypothèse de récurrence il existe $j \in \{1, ..., p\}$ tel que $F_j \cap H = H$. En particulier $H \subset F_j$. On suppose par l'absurde que pour tout $j \in \{1, ..., p\}, F_j \neq E$. Alors, par argument de dimension, pour tout sous-espace H de dimension $n-1$ dans E, il existe $j \in \{1, ..., p\}$ tel que $H = F_j$. Donc E admet p sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$ ce qui est absurde si $n \geq 2$. Par conséquent il existe $j \in \{1, ..., p\}$ tel que $F_j = E$ si $n \geq 2$. Maintenant si $n = 1$ alors les sous-espaces F_j sont de dimension 0 ou 1 et ne peuvent pas être tous de dimension 0 donc il existe $j \in \{1, ..., p\}$ tel que $F = E$.