Question de cours. Enoncer le développement limité de la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à l'ordre 3 en 0.

Question de cours. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan par équation différentielle.

Exercice. On considère $E = \mathbb{R}^{]-1,1[}$ et les vecteurs f_1, f_2, f_3 et f_4 de E définis par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{1-x}1+x, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Quel est le rang de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) ?

Exercice. On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réels et F le sous-espace des suites $u \in E$ telles qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 b_1 \neq a_1 b_0$ et les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ de premiers termes respectifs (a_0, a_1) et (b_0, b_1). Montrer que le couple $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ forme une base de F. En déduire $\dim(F)$.
3. (a) Soit $r \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation nécessaire et suffisante (1) sur r pour que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
   (b) On suppose qu cette équation (1) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Montrer que les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F. Comment déterminer l'expression générale de $u \in F$ en fonction de r_1 et r_2 ?
   (c) On suppose que cette équation (1) admet une racine réelle double r. Montrer que les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.
   (d) On suppose que cette équation (1) admet deux racines complexes conjuguées non réelles $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. Montrer que les suites $(\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Enoncer la formule de Stirling.

Question de cours. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan par application réciproque.

Exercice. On considère $n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{K}_n[X]\backslash\{0\}$ et $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X],\ A \mid P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{K}_n[X]$.
3. En déduire sa dimension.

Exercice. On considère un espace vectoriel réel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient H et H' deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$. Montrer que H et H' possèdent un sous-espace vectoriel supplémentaire commun.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer que F et G possèdent un sous-espace vectoriel supplémentaire commun.
3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) \leq \dim(G)$. Montrer qu'il existe S_F supplémentaire de F dans E et S_G supplémentaire de G dans E tels que $S_G \subset S_F$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Enoncer la formule de Taylor-Young.

Question de cours. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction tan par quotient.

Exercice. Soie $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère F la partie E définie par

$$F = \{P \times \cos + Q \times \sin,\ (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension.

Exercice. On souhaite montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante : "Pour tout espace vectoriel réel E de dimension n, pour tous sous-espaces $F_1, ..., F_p$ de E tels que $E = \bigcup_{j=1}^{p} F_j$, il existe $j \in \{1, ..., p\}$ tel que $F_j = E$.".

1. Initialiser la récurrence.
2. On suppose la propriété vraie au rang $n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On considère E espace vectoriel réel de dimension n et $F_1, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigcup_{j=1}^{p} F_j$.
   (a) Soit H un sous-espace de E de dimension $n - 1$. Que dire de la réunion des sous-espaces vectoriels $F_j \cap H, 1 \leq j \leq p$?
   (b) Montrer que si $n \geq 2$ alors E admet un nombre infini de sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$.
   (c) Conclure l'hérédité.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html