Question de cours. On considère P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. On considère p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Déterminer $p(u)$ pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire $p(e_1), p(e_2)$ et $p(e_3)$ où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer une base (v_1,v_2,v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$p(v_1)=\lambda_1 v_1, \quad p(v_2)=\lambda_2, \quad p(v_3)=\lambda_3 v_3.$$

Exercice. On considère l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'application $\varphi : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = f'' - 3f' + 2f.$$

1. Montrer que l'application φ est un endomorphisme.
2. Déterminer son noyau $\ker(\varphi)$.
3. Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de l'application φ ?

Exercice. Soient $p \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et S_p^a l'ensemble des suites réelles u telles que

$$\exists P_u \in \mathbb{R}_p[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P_u(n).$$

1. Montrer que S_p^a est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'application $\phi : u \in S_p^a \longmapsto P_u \in \mathbb{R}_p[X]$ est bien définie et linéaire.
3. Déterminer le noyau et l'image de ϕ.
4. Donner une base de S_p^a. On pourra utiliser les polynôme $R_k = (X+1)^k - aX^k, k \in \{0,...,p\}$.
5. En déduire l'expression générale de la suite u définie par

$$u_0 = -2, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. On considère trois scalaires distincts $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On considère (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
   (a) Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. Application : On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$. Déterminer l'unique fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice. On considère le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + z = 0$ et la droite vectorielle engendrée par $u = (1, 3, 1)$.

1. Montrer que les sous-espaces P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2. On note p la projection sur le plan P parallèlement à la droite D. Exprimer $p(x, y, z)$ en fonction de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3. Faire de même avec s la symétrie par rapport au plan P parallèlement à la droite D.

Exercice. On considère trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G de dimensions finies.

1. Soient deux applications linéaires $f \in L(E, F)$ et $g \in L(E, G)$. Montrer que

$$\ker(f) \subset \ker(g) \iff \exists h \in L(F, G),\ g = h \circ f.$$

2. En déduire que $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi$ des formes linéaires sur E,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi) \iff \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K},\ \varphi = \lambda_1 \varphi_1 + ... + \lambda_n \varphi_n.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. On considère $a \in \mathbb{C}$ et

$$E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de E.
3. On considère la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice. On considère l'espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et les applications $D, I : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, \quad D(f) = f', \quad I(f) = \int_0 f.$$

1. Montrer que D et I sont des endomorphismes.
2. Exprimer $D \circ I$ et $I \circ D$.
3. Déterminer les images et noyaux des applications D et I.

Exercice. On considère un espace vectoriel E et P l'ensemble des projecteurs de E. On définit la relation $\leq$ sur P par, pour tout $p, q \in P, p \leq q$ si $p \circ q = q \circ p = p$.

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur P.
2. Soient $p, q \in P$. Montrer que si p et q commutent alors $\inf\{p, q\} = p \circ q$ au sens de $\leq$.
3. Soient $p, q \in P$. A quelle condition nécessaire et suffisante en termes d'images et de noyaux est-il vrai que $p \leq q$?

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html