Exercice. On considère P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. On considère p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Déterminer $p(u)$ pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale et donner la matrice de passage de la base canonique à cette base.

Réponse.

1. $\dim(P)=2$ de base $((1,-1,0),(1,0,-1))$, $\dim(D)=1$ de base $((1,2,3))$ et $P\cap D=\{0\}$ car pour tout $(x,y,z)\in P\cap D$, nous avons
$$0=\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+\frac{x}{2}$$
i.e. $0=x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ i.e. $(x,y,z)=(0,0,0)$. Par conséquent P et D sont en somme directe et $\dim(P\oplus D)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$. Donc P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.

2. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors, d'après la question précédente, il existe $v=(x_P,y_P,z_P)\in P$ et $w=(x_D,y_D,z_D)\in D$ tels que $u=v+w$ i.e.
$$x=x_P+x_D,\quad y=y_P+y_D=y_P+2x_D,\quad z=z_P+z_D=z_P+3x_D.$$
Donc, en effectuant la somme, nous obtenons
$$x+y+z=x_P+y_P+z_P+6x_D=6x_D$$
i.e. $x_D=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{1}{6}y+\dfrac{1}{6}z$ et
$$w=(x_D,y_D,z_D)=\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}y+\frac{1}{6}z,\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z,\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right).$$
Par conséquent
$$p(u)=v=u-w=\left(\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}y-\frac{1}{6}z,-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z,-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right).$$

3. Nous obtenons
$$\begin{aligned}p(e_1)&=p((1,0,0))=\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right),\\ p(e_2)&=p((0,1,0))=\left(-\frac{1}{6},\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right),\\ p(e_3)&=p((0,0,1))=\left(-\frac{1}{6},-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$
Par conséquent
$$M_e(p)=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4. Nous avons, en notant $v_3=(1,2,3)\in D=\ker(p), p(v_3)=0=0\times v_3$. Puis, en notant $v_1=(1,-1,0), v_2=(1,0,-1)\in P, p(v_1)=v_1, p(v_2)=v_2$. De plus, d'après la question 1, (v_1,v_2,v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent
$$M_v(p)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

et

$$P_{ev} = M_{ve}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice. On considère $u, v : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définies par, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$u(P) = P \circ (X+1), \quad v(P) = P \circ (X-1).$$

Déterminer le rang de $u - v$ de façon matricielle.

Réponse. On considère la base canonique $e = (1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$,

$$\begin{array}{rcl} (u-v)(X^k) & = & u(X^k) - v(X^k) \\ & = & (X+1)^k - (X-1)^k \\ & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^j \\ & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1 - (-1)^{k-j}) X^j \\ & = & 2\displaystyle\binom{k}{k-1} X^{k-1} + 2\binom{k}{k-3} X^{k-3} + ... \end{array}$$

Par conséquent

$$M_e(u-v) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & * & 0 & \ldots & & \\ & 0 & 2 & 0 & * & 0 & \ldots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & & & & & \ddots & 2 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{rg}(u-v) = n-1$ car les $n-1$ dernières colonnes forment une famille libre et la première colonne est nulle.

Exercice. Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ non constante telle que

$$\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2, \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Le but de cet exercice est de montrer que, pour $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow f(A) \neq 0.$$

1. Déterminer $f(I_n)$ et $f(O_n)$.
2. Montrer le sens direct de l'équivalence souhaitée.
3. Pour le sens réciproque.
   (a) Montrer que $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1} \end{pmatrix}$ est semblable à deux matrices A_1 et A_2 telles que $A_1 A_2 = 0_n$. En déduire que $f(J_1) = 0$.
   (b) En déduire que si $\mathrm{rg}(A) = 1$ alors $f(A) = 0$.
   (c) Démontrer le sens réciproque de l'équivalence souhaitée.

Réponse.

1. Nous avons $f(I_n) = f(I_nI_n) = f(I_n)f(I_n)$ i.e $f(I_n)(f(I_n) - 1) = 0$. Donc $f(I_n) = 0$ ou $f(I_n) = 1$. Si $f(I_n) = 0$ alors $f(A) = f(AI_n) = f(A)f(I_n) = 0$ ce qui contredit le fait que f soit non constante. Par conséquent $f(I_n) = 1$.

   Puis de même $f(0_n) = f(0_n)f(0_n)$. Donc $f(0_n) = 0$ ou $f(0_n) = 1$. Si $f(0_n) = 1$ alors $1 = f(0_n) = f(0_nA) = f(0_n)f(A) = f(A)$ ce qui contredit le fait que f soit non constante. Par conséquent $f(0_n) = 0$.

2. On suppose que A est inversible. Alors, d'après la question précédente,

$$1 = f(I_n) = f(AA^{-1}) = f(A)f(A^{-1}).$$

   En particulier $f(A) \neq 0$.

3. (a) On considère $A_1 = J_1$ et $A_2 = \mathrm{diag}(0, 1, 0, ..., 0)$. Donc A_1 et A_2 sont semblables à J_1 car A_2 est obtenue en échangeant les deux premiers vecteurs de la base. Par conséquent $A_1A_2 = 0_n$. De plus, d'après ce qui précède,

$$0 = f(0_n) = f(A_1)f(A_2).$$

   Donc $f(A_1) = 0$ ou $f(A_2) = 0$. Notons i l'indice tel que $f(A_i) = 0$. Or A_i et J_1 sont semblables, donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $J_1 = PA_iP^{-1}$. Par conséquent

$$f(J_1) = f(P)f(A_i)f(P^{-1}) = 0.$$

   (b) On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Alors A est équivalente à J_1 : il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PJ_1Q$. Par conséquent

$$f(A) = f(P)f(J_1)f(Q) = 0.$$

   (c) Procédons par contraposée. On suppose que A n'est pas inversible. Donc $r = \mathrm{rg}(A) \in \{1, ..., n-1\}$. A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$. Or, pour $i \in \{1, ..., r\}$, J_r est semblable à A_i obtenue en échangeant les colonnes i et n de la matrice J_r. Ainsi $A_1...A_rJ_r$ est le produit de matrices diagonales avec, pour tout $i \in \{1, ..., r\}, [A_i]_{ii} = 0$ et $[J_r]_{nn} = 0$ car $r < n$. Par conséquent $A_1...A_rJ_r = 0$ et toutes les matrices présentes sont semblables à J_r. Donc, comme précédemment,

$$f(A_1) = 0, ..., f(A_r) = 0 \text{ ou } f(J_r) = 0.$$

   Par conséquent J_r admet une matrice semblable qui annule f. Ainsi, comme précédemment, $f(J_r) = 0$. Finalement $f(A) = 0$ car A semblable à J_r.

Exercice. On considère trois scalaires distincts $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ & P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On considère (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
   (a) Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. Application : On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer l'unique fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Réponse.

1. L'application Φ est linéaire par linéarité de l'évaluation, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{K}^3)$ et l'application Φ est injective car un polynôme de degré 2 avec 3 racines est nécessairement le polynôme nul. Par conséquent Φ est un isomorphisme.

2. (a) L'application Φ^{-1} est un isomorphisme et (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{K}^3$, donc $(L_1, L_2, L_3) = \Phi^{-1}(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Nous avons $\Phi(L_1) = e_1 = (1, 0, 0)$ i.e. $L_1(a_1) = 1, L_1(a_2) = 0$ et $L_1(a_3) = 0$. Donc a_2 et a_3 sont racines du polynôme L_1. Puis, comme $\deg(L_1) \leq 2$, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que

$$L_1 = \alpha(X - a_2)(X - a_3).$$

   Or $1 = L_1(a_1) = \alpha(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$ i.e. $\alpha \dfrac{1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$ et

$$L_1 = \frac{(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}.$$

   Par symétrie des rôles nous en déduisons

$$L_2 = \frac{(X - a_1)(X - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}, \quad L_3 = \frac{(X - a_1)(X - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

3. Les polynômes P et $P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$ coïncident en a_1, a_2 et a_3 et sont de degré au plus 2, donc sont égaux :

$$P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3.$$

   On pouvait aussi écrire $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$ et évaluer en a_1, a_2 et a_3.

4. On considère $a_1 = 0, a_2 = 3$ et $a_3 = 2$. Alors les a_i sont distincts. Donc, d'après ce qui précède, l'application Φ est un isomorphisme. Donc il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$(1, 3, 1) = \Phi(P) = (P(a_1), P(a_2), P(a_2)) = (P(0), P(3), P(2)).$$

   Ainsi la fonction polynomiale associée à P est l'unique fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C. De plus, d'après la question précédente,

$$P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3 = \frac{(X - 3)(X - 2)}{(-3)(-2)} + 3\frac{(X - 0)(X - 2)}{(3 - 0)(3 - 2)} + \frac{(X - 0)(X - 3)}{(2 - 0)(2 - 3)}$$

   i.e.

$$P = \frac{1}{6}(X - 3)(X - 2) + X(X - 2) - \frac{1}{2}X(X - 3) = \frac{2}{3}X^2 - \frac{4}{3}X + 1.$$

Exercice. On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $b = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On considère également $f \in L(E)$ tel que $M_b(f) = A$.

1. Montrer qu'il existe une base $c = (v_1, v_2, v_3)$ de E telle que $M_c(f) = D$.
2. Déterminer la matrice $P \in GL_3(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer P^{-1}
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Application : En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 0 \\ z_0 & = & 0 \end{array}\right., \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{lcccccc} x_{n+1} & = & 4x_n & - & 2y_n & - & 2z_n \\ y_{n+1} & = & x_n & & & - & z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n & - & 2y_n & - & z_n \end{array}\right..$$

Réponse.

1. On cherche $v_1 = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{K}^3$ non nul tel que $f(v_1) = 0$. Donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 2y & = & 0 \\ & & x & = & z \\ 2x & - & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e. $x = z$ et $x = y$. Donc par exemple $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$.

On cherche $v_2 = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{K}^3$ non nul tel que $f(v_2) = v_2$. Donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 2y & - & 2z & = & x \\ x & & & - & z & = & y \\ 3x & - & 2y & - & z & = & z \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} y & + & z & = & 0 \\ & & x & = & 0 \end{array}\right..$$

Donc par exemple $v_2 = e_2 - e_3$.

On cherche $v_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{K}^3$ non nul tel que $f(v_3) = v_3$. Donc

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & 2y & - & 2z & = & 2x \\ x & & & - & z & = & 2y \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2z \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & & & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \\ & & 4y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

i.e. $y = 0$ et $x = z$. Donc par exemple $v_3 = e_1 + e_3$.

Par conséquent la famille $c = (v_1, v_2, v_3)$ est une base (libre en dimension 3) et $M_c(f) = D$.

2. P est la matrice de passage de la base b à la base c :

$$P = P_{bc} = M_{cb}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, d'après la formule de changement de bases, $A = PDP^{-1}$.

3. On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{rc} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ L_3 \leftarrow -L_3 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3, L_2 \leftarrow L_2 + L_3 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right). \end{array}$$

Par conséquent $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. On en déduit $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Nous avons $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. On considère $a \in \mathbb{C}$ et

$$E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de E.
3. On considère la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Réponse.

1. On vérifier que la suite nulle est dans E et que E est stable par combinaison linéaire.
2. L'application $\varphi : u \in E \longmapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ est linéaire et bijective donc $\dim(E) = \dim(\mathbb{C}^2) = 2$.
3. L'équation caractéristique est $r^2 = 2ar + 4(ia-1)$ i.e. $r^2 - 2ar - 4(ia-1) = 0$ de discriminant

$$\Delta = 4a^2 + 16(ia-1) = 4(a^2 + 4ia - 4) = 2^2(a+2i)^2.$$

- Si $a = -2i$ alors $\Delta = 0$ d'où l'équation caractéristique admet une solution double $r_0 = -\dfrac{-2a}{2} = a = -2i$. Par conséquent il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)r^n = (\lambda n + \mu)(-2i)^n.$$

En particulier pour les deux premiers termes

$$1 = u_0 = \mu, \quad 1 = u_1 = (\lambda + \mu)(-2i) = -2i\lambda - 2i$$

i.e. $\mu = 1$ et $\lambda = \dfrac{1}{-2i} - 1 = \dfrac{i}{2} - 1$. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\left(\frac{i}{2} - 1\right)n + 1\right)(-2i)^n.$$

- Si $a \neq -2i$ alors $\Delta \neq 0$ d'où l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes

$$r_1 = \frac{2a + 2(a+2i)}{2} = 2(a+i), \quad r_2 = \frac{2a - 2(a+2i)}{2} = -2i.$$

Par conséquent il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda 2^n (a+i)^n + \mu(-2i)^n.$$

En particulier pour les deux premiers termes

$$1 = u_0 = \lambda + \mu, \quad 1 = u_1 = 2\lambda(a+i) - 2i\mu = 2\lambda(a+i) - 2i(1-\lambda) = \lambda(2a+4i) - 2i$$

i.e.

$$\lambda = \frac{1+2i}{2(a+2i)}, \quad \mu = 1 - \lambda = \frac{2a+2i-1}{2(a+2i)}.$$

Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(1+2i)2^n(a+i)^n + (2a+2i-1)(-2i)^n}{2(a+2i)}.$$

Exercice. Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ en fonction des réels a, b et c.

Réponse. En effectuant les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, nous avons que A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}.$$

Puis en effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - a^2 L_1$, nous avons que A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{pmatrix}.$$

Puis en effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (b+a)L_2$, nous avons que A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c+a)-(b+a)(c-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

- Si $a = b = c$ alors A est semblable à J_1 donc de rang 1.
- Si $a = b \neq c$ alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{pmatrix}$ de rang 2 car $(c-a)(c-b) \neq 0$.
- De même si $a \neq b = c$ ou $a = c \neq b$.
- Si a, b, c sont distincts alors la matrice A est de rang 3 car la famille des colonnes est libre donc est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $b = (x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-1}(x))$ forme une base de E.
2. Déterminer les matrices de $f, f^2, ..., f^{n-1}$ dans cette base.
3. Application : En déduire que

$$\{g \in L(E),\ g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, ..., f^{n-1}).$$

Réponse.

1. Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ non nul tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Soit $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que

$$0 = \lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x).$$

   Donc, en appliquant f^{n-1},

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{k+n-1}(x) = \lambda_0 f^{n-1}(x).$$

   Ainsi, comme $f^{n-1}(x) \neq 0, \lambda_0 = 0$. On en déduit par itérations successives que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$. Par conséquent la famille $(x, f(x), ..., f^{n-1}(x))$ est une famille libre de $n = \dim(E)$ vecteurs de E, d'où une base de E.

2. Nous avons alors

$$M_b(f) = \begin{pmatrix} 0_{1,n-1} & 0 \\ I_{n-1} & 0_{n-1,1} \end{pmatrix}.$$

   Puis

$$M_b(f^2) = (M_b(f))^2 = \begin{pmatrix} 0_{2,n-2} & 0_2 \\ I_{n-2} & 0_{n-2,2} \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, par itérations successives, pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$,

$$M_b(f^k) = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & 0_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix}.$$

3. Nous avons déjà l'inclusion réciproque. On considère maintenant $g \in L(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. On note $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}$ les coordonnées de $g(x)$ dans la base b :

$$g(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + ... + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x).$$

Puis

$$g(f(x)) = f(g(x)) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + ... + \lambda_{n-2} f^{n-1}(x).$$

Ainsi, par itérations successives, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$,

$$g(f^k(x)) = \lambda_0 f^k(x) + \lambda_1 f^{k+1}(x) + ... + \lambda_{n-1-k} f^{n-1}(x).$$

Par conséquent

$$M_b(g) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & \\ \lambda_1 & \ddots & & (0) & \\ \lambda_2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \lambda_{n-1} & \dots & \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k M_b(f^k).$$

Donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$.