Exercice. On considère P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. On considère p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Déterminer $p(u)$ pour tout $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale et donner la matrice de passage de la base canonique à cette base.

Exercice. On considère $u, v : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définies par, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$u(P) = P \circ (X+1), \quad v(P) = P \circ (X-1).$$

Déterminer le rang de $u - v$ de façon matricielle.

Exercice. Soit $f : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ non constante telle que

$$\forall (A,B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2, \quad f(AB) = f(A)f(B).$$

Le but de cet exercice est de montrer que, pour $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A \in GL_n(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow f(A) \neq 0.$$

1. Déterminer $f(I_n)$ et $f(O_n)$.
2. Montrer le sens direct de l'équivalence souhaitée.
3. Pour le sens réciproque.
   (a) Montrer que $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1} \end{pmatrix}$ est semblable à deux matrices A_1 et A_2 telles que $A_1 A_2 = 0_n$. En déduire que $f(J_1) = 0$.
   (b) En déduire que si $\operatorname{rg}(A) = 1$ alors $f(A) = 0$.
   (c) Démontrer le sens réciproque de l'équivalence souhaitée.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. On considère trois scalaires distincts $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On considère (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$ pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
   (a) Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. Application : On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer l'unique fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Exercice. On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $b = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On considère également $f \in L(E)$ tel que $M_b(f) = A$.

1. Montrer qu'il existe une base $c = (v_1, v_2, v_3)$ de E telle que $M_c(f) = D$.

2. Déterminer la matrice $P \in GL_3(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

3. Calculer P^{-1}

4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Application : En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 0 \\ z_0 & = & 0 \end{array} \right. , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 4x_n & - & 2y_n & - & 2z_n \\ y_{n+1} & = & x_n & & & - & z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n & - & 2y_n & - & z_n \end{array} \right. .$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. On considère $a \in \mathbb{C}$ et

$$E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n\}.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de E.
3. On considère la suite $u \in E$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice. Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ en fonction des réels a, b et c.

Exercice. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $b = (x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-1}(x))$ forme une base de E.
2. Déterminer les matrices de $f, f^2, ..., f^{n-1}$ dans cette base.
3. Application : En déduire que

$$\{g \in L(E),\ g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, ..., f^{n-1}).$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html