

Exercice.

1. On considère la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ entier et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) En utilisant une minoration de u_n pour tout $n \geq 2$ entier, montrer que si $\alpha \leq 0$ alors la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.
 - (b) En utilisant la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ définie sur $]1, +\infty[$, étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ lorsque $\alpha > 0$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

Exercice. On considère $u, v \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}.$$

On suppose que la série $\sum v_n$ converge.

1. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ diverge.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html>

Exercice. On considère la série $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$.

1. Montrer que $\sqrt{n^2 + n + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right)$ où α est un réel à déterminer.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge.
3. La série $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer, en fonction de a et b , la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$.
2. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} f(0)$.
2. En déduire, en fonction de α , la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html>

Exercice.

1. Soient u et v deux suites réelles telles que v est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Montrer que si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Montrer que si v est une suite positive et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln(n)}{\sqrt{n+3} - 1}$.

Exercice. On considère $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

1. On considère v la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Même question si $v_n = \frac{u_n}{u_1 + \dots + v_n}$. On pourra étudier la suite $w = (\ln(1 - v_n))_{n \geq 2}$ dans le cadre de la divergence.

Exercice. On considère $u \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle, et la suite v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n u_k - nu_n.$$

Montrer que si la suite v est bornée alors la série $\sum u_n$ converge.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

<https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html>