Exercice.

1. On considère la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ entier et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) En utilisant une minoration de u_n pour tout $n \geq 2$ entier, montrer que si $\alpha \leq 0$ alors la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

   (b) En utilisant la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ définie sur $]1, +\infty[$, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ lorsque $\alpha > 0$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Réponse.

1. (a) On suppose $\alpha \leq 0$. Alors, pour tout $n \geq 2$ entier, en notant $\beta = -\alpha \geq 0$,

$$u_n = \frac{(\ln(n))^\beta}{n} \geq \frac{(\ln(2))^\beta}{n} > 0.$$

Or la série $\sum \dfrac{(\ln(2))^\beta}{n}$ est divergente, d'où, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

(b) On suppose $\alpha > 0$. Alors la fonction f est décroissante. Donc, pour tout $k \geq 2$ entier, pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$. Ainsi, en intégrant sur $[k, k+1]$, nous obtenons

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

De même, pour tout $k \geq 3$ entier, pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t)$, d'où, en intégrant sur $[k-1, k]$, nous obtenons

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

Par conséquent, en sommant sur $k \in \{3, ..., n\}$ pour tout $n \geq 3$ entier,

$$\int_3^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_2^n f(t)dt,$$

avec

$$\int_2^n f(t)dt = \int_2^n \frac{dt}{t(\ln(t))^\alpha}dt = \int_2^n \ln'(t)(\ln(t))^{-\alpha}dt.$$

Il faut donc distinguer selon si $\alpha \neq 1$ ou non.

- Si $\alpha > 1$ alors

$$\int_2^n f(t)dt = \left[\frac{(\ln(t))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^n = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln(n))^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(\ln(2))^{\alpha-1}}.$$

  Donc la suite des sommes partielles est une suite croissante majorée, donc convergente. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

- Si $\alpha = 1$ alors

$$\int_3^{n+1} f(t)dt = [\ln(\ln(t))]_3^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(3)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

  Donc la suite des sommes partielles diverge, d'où la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

- Si $\alpha < 1$ alors

$$\int_3^{n+1} f(t)dt = \left[\frac{(\ln(t))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_3^{n+1} = \frac{1}{1-\alpha}\left((\ln(n+1))^{1-\alpha} - (\ln(3))^{1-\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

  Donc, comme précédemment, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est divergente.

2. Nous avons
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e\exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= e\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
Donc
$$e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$
Puis $e^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et
$$\ln(n^2+n) = \ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 2\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n).$$
Par conséquent
$$\frac{\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8n(\ln(n))^2} > 0.$$
Or, d'après la question précédente pour $\alpha = 2 > 1$, la série $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est convergente. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série en question est convergente.

Exercice. Calculer la somme $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Réponse. Nous avons, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, par télescopage selon p,
$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+q^2}-\frac{1}{p+q^2+1}\right)\\ &= \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Exercice. On considère la suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Déterminer la seule limite possible ℓ pour la suite u.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{1}{2}|u_n-\ell|$.
3. En déduire que la suite u converge vers ℓ et la nature de la série $\sum(u_n-\ell)$.

Réponse.

1. On suppose que la suite u converge vers $\ell\in\mathbb{R}_+$. Alors, par continuité de la fonction $x\longmapsto\sqrt{1+x}$, nous avons $\ell = \sqrt{1+\ell}$ i.e. $\ell^2-\ell-1=0$ qui est une équation polynomiale du second degré de discriminant $\Delta = 5$, d'où, comme $\ell\geq 0$, $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors
$$|u_{n+1}-\ell| = |\sqrt{1+u_n}-\sqrt{1+\ell}| = \frac{|u_n-\ell|}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\ell}} \leq \frac{1}{2}|u_n-\ell|.$$
3. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, nous en déduisons
$$|u_n-\ell| \leq \frac{1}{2^n}|u_0-\ell|.$$
Par conséquent la suite u converge vers ℓ et, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum(u_n-\ell)$ est absolument convergente car la série géométrique $\sum\frac{1}{2^n}$ l'est. Donc la série $\sum(u_n-\ell)$ est convergente.

Exercice. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Montrer que $\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel à déterminer.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. La série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Réponse.

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n+1} &= n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3+o\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}-\frac{3}{16n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}-\frac{3}{16n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n+\frac{1}{2}+\frac{3}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   Donc $\alpha = \frac{3}{8}$.

2. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1}) &\underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   La série $\sum(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$ vérifie le critère des séries alternées donc converge. De plus la série $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument par comparaison car la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Par conséquent la série $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$ est convergente.

3. Nous avons

$$\frac{\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})}{(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Donc

$$\frac{|\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})|}{\frac{3\pi}{8n}} = \left|\frac{\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})}{(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Par conséquent

$$|\cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3\pi}{8n}.$$

   Or la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, d'où la série en question n'est pas absolument convergente.

Exercice.

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion disjointe des $A_n = \{2^n(2k+1),\ k \in \mathbb{N}\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \dfrac{x}{1-x}$.

Réponse.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, en notant $n = \nu_2(p) \in \mathbb{N}, p = 2^n q$ avec q impair. D'où $p = 2^n(2k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $p \in A_n$.

   Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ distincts. Supposons par l'absurde qu'il existe $p \in A_n \cap A_{n'}$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $2^n(2k+1) = p = 2^{n'}(2k'+1)$. Donc, par unicité de la décomposition en nombres premiers, $n = n'$ ce qui est absurde.

   Par conséquent $\mathbb{N}^*$ est bien la réunion disjointe des A_n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $x \in [0,1[$. Alors, par sommation par paquets,

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x} &= \sum_{p=1}^{+\infty} x^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p \in A_n} x^p \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^n(2k+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^{2^{n+1}})^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n} \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}\end{aligned}$$

Exercice. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+\cos(n)}$.

1. Déterminer la nature de cette série par développement limité.

2. Déterminer la nature de cette série en appliquant le critère des séries alternées directement. Préciser un encadrement de la somme de cette série et une majoration de la valeur absolue du reste.

Réponse.

1. Nous avons

$$\frac{(-1)^n}{n+\cos(n)} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\dfrac{\cos(n)}{n}} = \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}\left(1 - \frac{\cos(n)}{n} + o\left(\frac{\cos(n)}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   Or la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente par critère des séries alternées et la série $\sum O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente par théorème de comparaison donc convergente. Par conséquent la série souhaitée est convergente.

2. Appliquons le critère des séries alternée.

   - La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n+\cos(n)}\right)_{n\geq 1}$ est alternée car $n+\cos(n) \geq 1+\cos(n) > 0$ pour tout $n \geq 1$ entier.
   - Nous avons $\dfrac{(-1)^n}{n+\cos(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{1}{n+1+\cos(n+1)} \leq \frac{1}{n+\cos(n)} \iff n+\cos(n) \leq n+1+\cos(n+1) \iff \cos(n)-\cos(n+1) \leq 1.$$

     Or

$$\cos(n) - \cos(n+1) = -2\sin\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{2x+1}{2}\right) \leq 2\sin\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2\frac{1}{2} = 1.$$

     Donc la suite est décroissante en valeur absolue.

Par conséquent, d'après le critère des séries alternées, la série souhaitée est convergente de somme S compris entre les deux premiers termes :

$$-\frac{1}{1+\cos(1)} \leq S \leq \frac{1}{2+\cos(2)}.$$

De plus le reste R_n d'ordre $n \geq 1$ entier vérifie

$$|R_n| \leq \frac{1}{n+1+\cos(n+1)}.$$

Exercice.

1. Soient u et v deux suites réelles telles que v est non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Montrer que si v est une suite positive et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{((-1)^n+i)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\sqrt{n+3}-1}$.

Réponse.

1. (a) On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Donc, comme v non nulle à partir d'un certain rang, $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ entier,

$$\frac{3}{2} \geq \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

   Donc u_n et v_n sont de même signe à partir de ce rang n_0.

   (b) On suppose que $v > 0$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ entier,

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n.$$

   Ainsi, si la série $\sum u_n$ est divergente alors, d'après la seconde inégalité, la série $\sum v_n$ l'est également. Et si la série $\sum u_n$ est convergente alors, d'après la première inégalité, la série $\sum v_n$ l'est également. Par conséquent les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Nous avons

$$\left|\frac{((-1)^n+i)\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\sqrt{n+3}-1}\right| = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\sqrt{n+3}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

   Or

$$\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right) > 0$$

   et la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est convergente. Par conséquent la série en question est absolument convergente donc convergente.

Exercice.

1. Montrer que $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est la réunion disjointe des $D_n = \{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ k\ell = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire que, pour tout $s \in]1,+\infty[$, $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^s}$ où d_n est le nombre de diviseurs positifs de n.

Réponse.

1. Soit $(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Alors, en notant $n = k\ell$, nous avons $(k,\ell) \in D_n$.

   Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$ distincts. On suppose par l'absurde qu'il existe $(k,\ell) \in D_n \cap D_{n'}$. Alors $n = k\ell = n'$ ce qui est absurde.

   Par conséquent $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est bien la réunion disjointe des $D_n = \{(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ k\ell = n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $s \in]1, +\infty[$. Nous avons donc, par sommation par paquets,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right)^2 &= \sum_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(k\ell)^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,\ell)\in D_n} \frac{1}{(k\ell)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,\ell)\in D_n} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^s}\end{aligned}$$

car $|D_n| = d_n$.

Exercice. On considère la suite u définie par $u_0 = a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Déterminer la limite de la suite u.
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^3$ en utilisant la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$ en utilisant la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$.

Réponse.

1. Nous avons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par étude de fonction,

$$u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \leq 0.$$

Donc la suite u est décroissante. Ainsi, par théorème de la limite monotone, la suite u converge vers $\ell \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Or l'unique point fixe de la fonction sin est en 0, d'où $\ell = 0$.

2. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -u_0.$$

Donc la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente. De plus

$$u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^4) - u_n = -\frac{u_n^3}{6} + o(u_n^4).$$

Donc $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}$. Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes négatifs, la série $\sum u_n^3$ est convergente.

3. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc la série $\sum(\ln(u_{n+1} - \ln(u_n)))$ est divergente. De plus

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^3)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^3).$$

Donc $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{6}$. Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes négatifs, la série $\sum u_n^2$ est convergente.