Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $D_n = \det(A_n)$.

1. Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.

Réponse.

1. On développe D_{n+2} selon la première ligne

$$\begin{aligned} D_{n+2} &= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+1} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n+1} \\ &= 2D_{n+1} - D_n. \end{aligned}$$

2. Ainsi la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ de solution double $r_0 = 1$. Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$D_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n.$$

Or $\lambda + \mu = D_1 = \det(A_1) = 2$ et $\lambda + 2\mu = D_2 = \det(A_2) = 3$, d'où $\mu = 1$ et $\lambda = 1$. Par conséquent

$$D_n = n + 1.$$

Exercice. On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices inversibles de matrice inverse à coefficients entiers.

1. Montrer que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{Z}), |\det(A)| = 1$.
2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \{0, ..., 2n\}, \quad A + kB \in GL_n(\mathbb{Z}).$$

Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$. On pourra s'intéresser à $\det(A + xB)$ et $\det\left(\frac{1}{x}A + B\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Réponse.

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. Alors $AA^{-1} = I_n$. Donc $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Or $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont entiers, d'où $\det(A) = \pm 1$.
2. On considère $P = \det(A + XB) \in \mathbb{R}_n[X]$. Or, d'après l'hypothèse et la question précédente, $P(k) = \pm 1$ pour tout $k \in \{0, ..., 2n\}$. Donc $P^2(k) - 1 = 0$. Ainsi $P^2 - 1$ admet $2n + 1$ racines et est de degré $2n$, donc est nul. Ainsi $\det(A) = P(0) = \pm 1$ et, par continuité,

$$\det(B) = \lim_{x\to+\infty} \det\left(\frac{1}{x} + B\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \pm\frac{1}{x^n} = 0.$$

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}$. On note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de la matrice A.

1. Rappeler la définition de $\mathrm{Com}(A)$.

2. Donner le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A. On pourra traiter les cas $\mathrm{rg}(A) = n, \mathrm{rg}(A) = n-1$ et $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ séparément.

3. Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 3$, l'équation $A = \mathrm{Com}(A)$.

Réponse.

1. Nous avons $\mathrm{Com}(A) = (\Delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec, pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}, \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ et $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice obtenue à partir de A en enlevant sa i-ième ligne et sa j-ième colonne.

2. Procédons par disjonction des cas.

   - Si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors l'égalité $\mathrm{Com}(A)^T A = \det(A)I_n$ donne $\mathrm{Com}(A) = \det(A)(A^{-1})^T$ de rang n également.
   - Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\det(A) = 0$ et il existe A_{ij} inversible. En particulier $\mathrm{Com}(A) \neq 0$. De plus $\mathrm{Com}(A)^T A = \det(A)I_n = 0$. Donc $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Com}(A)^T)$. Ainsi, par théorème du rang et $\mathrm{Com}(A) \neq 0, 0 < \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)^T) = n - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Com}(A)^T)) \leq n-(n-1) = 1$. Par conséquent $\mathrm{Com}(A) = 1$.
   - Si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ alors aucun A_{ij} ne peut être inversible. Donc $\mathrm{Com}(A) = 0$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 0$.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = \mathrm{Com}(A)$. Alors, d'après la question précédente, $A = 0$ ou $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = n$. Dans le second cas nous avons

$$\det(A)I_n = \mathrm{Com}(A)^T A = A^T A.$$

   Donc $(\det(A))^n = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$. Ainsi $\det(A) = \pm 1$. De plus

$$\det(A) = [\det(A)I_n]_{11} = [A^T A]_{11} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 \geq 0.$$

   Par conséquent $\det(A) = 1$ et $A^T A = \det(A)I_n = I_n$. Réciproquement $A = 0$ et A tel que $\det(A) = 1$ et $A^T A = I_n$ vérifient bien que $\mathrm{Com}(A) = A$.

Exercice. On note

$$\ell^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 < +\infty \right\}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $x, y \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On note alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n = (x \mid y)$.

   (b) Montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   On admet que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2.

2. On considère F l'ensemble des suites réelles presque nulles i.e. les suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini de termes.

   (a) Déterminer $F^\perp$ au sens de $(\cdot \mid \cdot)$.

   (b) Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

Réponse.

1. (a) Soient $x, y \in \ell^2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, |x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$. Donc, par comparaison la série $\sum x_n y_n$ converge absolument donc simplement.

   (b) La suite nulle est dans ℓ^2. De plus, pour $x, y \in \ell^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$(\lambda x + y)_n^2 = (\lambda x_n + y_n)^2 = \lambda^2 x_n^2 + 2\lambda x_n y_n + y_n^2.$$

   Donc, grâce à la question précédente, la série $\sum (\lambda x + y)_n$ est une combinaison linéaire de séries convergentes, donc est convergente. Par conséquent $\lambda x + y \in \ell^2$ et ℓ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. (a) Soit $y \in F^\perp$. Alors, pour tout $x \in F, (x \mid y) = 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $x = \delta_n$ est dans F. Donc $0 = (\delta_n \mid y) = y_n$. Ainsi $y = 0$. Réciproquement $\{0\} \subset F^\perp$, d'où $F^\perp = \{0\}$.

   (b) Soit $x \in \ell^2$ et $y \in F^\perp = \{0\}$. Alors $(x \mid y) = (x \mid 0) = 0$. Donc $x \in (F^\perp)^\perp$, d'où $\ell^2 = (F^\perp)^\perp$. Par contre $F \neq \ell^2$ car $x = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans ℓ^2 mais pas dans F. Par conséquent $F \subset (F^\perp)^\perp$ et $F \neq (F^\perp)^\perp$.

Exercice. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe deux complexes uniques a et b tels que $f(z) = az + b\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. En déduire $\det(f)$ en fonction de a et b.

Réponse.

1. On procède par analyse-synthèse.

   - On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = az + b\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors, en particulier,

     $$f(1) = a + b = x_a + x_b + i(y_a + y_b)$$

     et

     $$f(i) = ai - bi = y_b - y_a + i(x_a - x_b).$$

     Ainsi nous obtenons les systèmes

     $$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_a & + & x_b & = & \mathrm{Re}(f(1)) \\ x_a & - & x_b & = & \mathrm{Im}(f(i)) \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} y_a & + & y_b & = & \mathrm{Im}(f(1)) \\ -y_a & + & y_b & = & \mathrm{Re}(f(i)). \end{array} \right.$$

     Donc

     $$x_a = \frac{\mathrm{Re}(f(1)) + \mathrm{Im}(f(i))}{2}, \quad x_b = \frac{\mathrm{Re}(f(1)) - \mathrm{Im}(f(i))}{2}$$

     et

     $$y_a = \frac{\mathrm{Im}(f(1)) - \mathrm{Re}(f(i))}{2}, \quad y_b = \frac{\mathrm{Im}(f(1)) + \mathrm{Re}(f(i))}{2}.$$

- Réciproquement on vérifie que $a = x_a + iy_a$ et $b = x_b + iy_b$ vérifient l'égalité souhaitée.

2. La famille $e = (1, i)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ et

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} x_a + x_b & y_b - y_a \\ y_a + y_b & x_a - x_b \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\det(f) = (x_a + x_b)(x_a - x_b) - (y_a + y_b)(y_b - y_a) = x_a^2 - x_b^2 - y_b^2 + y_a^2 = |a|^2 - |b|^2.$$

Exercice. Soient $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \det(A + xJ)$ est affine en $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $\det(A + xJ) = \det(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Réponse.

1. Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en effectuant les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1, 2 \leq i \leq 2n$,

$$\det(A + xJ) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} - a_{11} & \dots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{11} & \dots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Puis, en développant selon la première ligne, nous obtenons une expression affine en x.

2. Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - xJ) = (-1)^{2n} \det(-A + xJ) = \det(A^T + xJ) = \det(A^T + xJ^T) = \det(A + xJ).$$

Donc la fonction est paire et affine. Par conséquent elle est constante. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\det(A + xJ) = \det(A + 0J) = \det(A).$$

Exercice. Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et de norme associée $\|\cdot\|$.

1. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donner le cas d'égalité avec sa démonstration.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$. Montrer que l'ensemble
$$\left\{\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E\right\}$$
admet une borne inférieure m. Déterminer la valeur de m.

Réponse.

1. Pour tout $x, y \in E$, nous avons $|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires. En effet, pour $x, y \in E$, nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x \mid y) + t^2\|y\|^2$$
qui est une expression polynomiale du second degré en t et toujours positive. Donc
$$0 \leq \Delta = 4(x \mid y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$$
i.e. $|(x \mid y)| \leq \|x\|\|y\|$. Maintenant s'il y égalité alors $\Delta = 0$. Donc il existe (un unique) $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $0 = \|x + t_0 y\|^2$ i.e. $x = -t_0 y = \lambda y$ en notant $\lambda = -t_0$. Donc x et y sont colinéaires. Réciproquement si x et y sont colinéaires alors l'égalité est vérifiée.
2. Soit $f \in E$. Alors les deux intégrales ont du sens et, par inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)} \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2 = (b-a)^2$$
avec égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires i.e. qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{f}}$ i.e. $f = \lambda > 0$. Par conséquent $m = (b-a)^2$ atteint en les constantes $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice. On considère $V = \{\exp \times P,\ P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que V est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Montrer que l'application $D : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de V et déterminer son déterminant.

Réponse.

1. $V = \phi(\mathbb{R}_n[X])$ avec $\phi : P \longmapsto \exp \times P$ linéaire donc V est un espace vectoriel. De plus $(1, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc $(\exp, \exp \times X, ..., \exp \times X^n)$ est une famille génératrice de V. De plus on peut vérifier qu'il s'agit d'une famille libre, donc d'une base. Par conséquent $\dim(V) = n + 1$.
2. L'application D est linéaire par linéarité de la dérivation. De plus pour $\exp \times P \in V$, nous avons
$$D(\exp \times P) = \exp \times (P' + P) \in V.$$
Donc D est un endomorphisme de V. Puis, en notant $e = (\exp, \exp \times X, ..., \exp \times X^n)$, nous avons, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$,
$$D(\exp \times X^k) = k \exp \times X^{k-1} + \exp \times X^k$$
et $D(\exp) = \exp$. Ainsi
$$M_e(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Donc, comme il s'agit d'une matrice triangulaire supérieure, $\det(D) = \det(M_e(D)) = 1$.

Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta : x \longmapsto \begin{vmatrix} a+x & b+x & \dots & b+x \\ c+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ c+x & \dots & c+x & a+x \end{vmatrix}_n$.

1. Montrer que la fonction Δ est affine en x.
2. En déduire le déterminant $\delta = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}_n$.

Réponse.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, en effectuant, dans $\Delta(x)$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n, 1 \leq i \leq n$, nous obtenons

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a-c & b-c & \dots & b-c & b-a \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & b-a \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-c & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a-c & b-a \\ c+x & c+x & \dots & c+x & a+x \end{vmatrix}_n.$$

Puis, en développant selon la dernière ligne, nous obtenons une expression affine $\Delta(x) = Ax + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

2. Nous avons $-Ab + B = \Delta(-b) = (a-b)^n$ et $-Ac + B = \Delta(-c) = (a-c)^n$. Donc, si $b \neq c$,

$$A = \frac{(a-b)^n - (a-c)^n}{c-b}$$

et

$$\delta = \Delta(0) = B = (a-b)^n + Ab = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$$

Maintenant, pour le cas $b = c$, on fixe b et on fait tendre c vers b dans $\delta = \delta(c)$. La fonction $c \longmapsto \delta(c)$ est continue car polynomiale,

$$\delta(c) = \frac{c(a-b)^n - b(a-b)^n + b(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b} = (a-b)^n - b\frac{(a-c)^n - (a-b)^n}{c-b}$$

$$= (a-b)^n - b\frac{f(c) - f(b)}{c-b}$$

avec $f(x) = (a-x)^n$ dérivable de fonction dérivée $f' : x \longmapsto -n(a-x)^{n-1}$. Donc

$$\delta(c) \underset{c \longmapsto b}{\longrightarrow} (a-b)^n + bn(a-b)^{n-1} = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b).$$

De plus la fonction δ est continue en c car polynomiale, d'où $\delta(b) = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b)$.