Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $D_n = \det(A_n)$.

1. Montrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.

Exercice. On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices inversibles de matrice inverse à coefficients entiers.

1. Montrer que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{Z}), |\det(A)| = 1$.
2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \{0, ..., 2n\}, \quad A + kB \in GL_n(\mathbb{Z}).$$

   Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$. On pourra s'intéresser à $\det(A + xB)$ et $\det\left(\frac{1}{x}A + B\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R}$. On note $\text{Com}(A)$ la comatrice de la matrice A.

1. Rappeler la définition de $\text{Com}(A)$.
2. Donner le rang de $\text{Com}(A)$ en fonction du rang de A. On pourra traiter les cas $\text{rg}(A) = n, \text{rg}(A) = n - 1$ et $\text{rg}(A) \leq n - 2$ séparément.
3. Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 3$, l'équation $A = \text{Com}(A)$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. On note

$$\ell^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 < +\infty \right\}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $x, y \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge. On note alors sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n = (x \mid y)$.

   (b) Montrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

   On admet que $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur ℓ^2.

2. On considère F l'ensemble des suites réelles presque nulles i.e. les suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini de termes.

   (a) Déterminer $F^{\perp}$ au sens de $(\cdot \mid \cdot)$.

   (b) Comparer F et $(F^{\perp})^{\perp}$.

Exercice. Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe deux complexes uniques a et b tels que $f(z) = az + b\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. En déduire $\det(f)$ en fonction de a et b.

Exercice. Soient $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 1.

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \det(A + xJ)$ est affine en $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que $\det(A + xJ) = \det(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Exercice. Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et de norme associée $\|\cdot\|$.

1. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donner le cas d'égalité avec sa démonstration.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$. Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{dt}{f(t)},\ f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m. Déterminer la valeur de m.

Exercice. On considère $V = \{\exp \times P,\ P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que V est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Montrer que l'application $D : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de V et déterminer son déterminant.

Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta : x \longmapsto \begin{vmatrix} a+x & b+x & \dots & b+x \\ c+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ c+x & \dots & c+x & a+x \end{vmatrix}_n$.

1. Montrer que la fonction Δ est affine en x.
2. En déduire le déterminant $\delta = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}_n$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2425.html