Question de cours. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice. On considère un intervalle réel I et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Ecrire la signification de
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq M.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
2. Ecrire avec des quantificateurs l'assertion : La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur. Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
3. Ecrire la signification et la négation de
$$\forall x \in I, \quad f(x) \neq 0.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.

Réponse.

1. Cela signifie que la fonction f n'est pas majorée comme les fonctions constantes. La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x \in \mathbb{R}$ ne vérifie pas cette assertion.
2. Avec des quantificateurs l'assertion est
$$\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y) \quad x = y.$$
Les fonctions strictement monotone vérifient cette assertion et la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ne la vérifie pas car $(-1)^2 = 1 = 1^2$.
3. Cette assertion signifie que la fonction f ne s'annule pas sur I. La fonction exp la vérifie mais pas la fonction ln.

Exercice. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! p, k \in \mathbb{N}, \quad n = 2^k(2p+1).$$

Réponse. Pour l'existence on montre par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $P(n) : \exists p, k \in \mathbb{N}, n = 2^k(2p+1)$.

— Initialisation : $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les assertions $P(k), 1 \leq k \leq n$, sont vraies. Si $n+1$ est pair alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + 1 = 2m$. Or $m = \dfrac{n+1}{2} < n+1$, donc, par hypothèse de récurrence forte, il existe $p, k \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2^k(2p+1)$. Ainsi
$$n + 1 = 2m = 2^{k+1}(2p+1).$$
Si maintenant $n+1$ est impaire alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$n + 1 = 2p + 1 = 2^0(2p+1).$$
Par conséquent l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : Le théorème de récurrence forte permet de conclure que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists p, k \in \mathbb{N}, \quad n = 2^k(2p+1).$$

Pour l'unicité : soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels
$$2^k(2p+1) = n = 2^\ell(2q+1).$$
Quitte à inverser k et ℓ on peut supposer $k \leq \ell$. Alors
$$2p + 1 = 2^{\ell - k}(2q+1).$$
Donc, par imparité, $k = \ell$. Finalement $2p + 1 = 2q + 1$ et ainsi $p = q$.

Exercice. On considère un intervalle réel I, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et les assertions suivantes :

— $P : \forall x \in I, f(x) = 0$.
— $Q : \exists x \in I, f(x) = 0$.
— $R : [\forall x \in f(x) > 0]$ ou $[\forall x \in I, f(x) < 0]$.

Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies. Justifier si oui et donner un contre-exemple sinon.

1. $P \Longrightarrow Q$.
2. $Q \Longrightarrow P$.
3. $Q \Longrightarrow R$.
4. $non(R) \Longrightarrow Q$.
5. $non(Q) \Longrightarrow non(P)$.
6. $non(P) \Longrightarrow non(R)$.

Réponse.

1. Oui.
2. Non. Par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ s'annule uniquement en 0.
3. Non. Même contre-exemple.
4. Non. Par exemple la fonction f qui à un réel associe son signe ($f(0) = 1$) vérifie $f(-1) = -1 \leq 0$ et $f(1) = 1 \geq 0$ mais ne s'annule jamais.
5. Oui. Il s'agit de la contraposée de l'implication 1.
6. Non. Par exemple la fonction constante $f = 1$ vérifie que $f(0) = 1 \neq 0$ mais ne vérifie pas $non(R)$.

Exercice. Soient $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x).$$

1. Calculer $P_n(x)$ pour $x \equiv 0[\pi]$.
2. Calculer $P_n(x)$ dans le cas contraire.

Réponse.

1. On suppose que $x \equiv 0[\pi]$. Alors, pour tout $k \in \{1, ..., n\}, 2^k x \equiv 0[2\pi]$. Donc
$$P_n(x) = \cos(x) = \pm 1.$$
2. On suppose le contraire. Nous avons
$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$
puis
$$\sin(x)\cos(x)\cos(2x) = \frac{1}{4}\sin(4x).$$
Donc nous pouvons montrer par récurrence ou itérations successives que
$$\sin(x)P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1}x).$$
Ainsi, comme $\sin(x) \neq 0$,
$$P_n(x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}x}.$$

Question de cours. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice. On considère un intervalle réel I et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Ecrire la signification de
$$\forall x \in I, \quad f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
2. Ecrire avec des quantificateurs l'assertion : La fonction f s'annule sur I. Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
3. Ecrire la signification et la négation de
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.

Réponse.

1. Cela signifie que la fonction ne peut s'annuler qu'en 0 mais elle ne s'annule pas forcément par exemple si $0 \notin I$ ou si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. La fonction carrée la vérifie mais pas la fonction cos.
2. Avec des quantificateurs l'assertion est
$$\exists x \in I, \quad f(x) = 0.$$
La fonction nulle la vérifie mais pas la fonction constante égale à 1.
3. Cela signifie que la fonction f est majorée. La négation devient
$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in I, \quad |f(x)| > M.$$
La fonction cos vérifie cette assertion sur $\mathbb{R}$ mais pas la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

Réponse. Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède par disjonction de cas.

1. Si n est pair alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$ et ainsi
$$\frac{n(n^2+1)}{2} = m(n^2+1) \in \mathbb{N}.$$
2. Si n est impair alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m+1$ et ainsi
$$\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n(4m^2+4m+2)}{2} = n(2m^2+2m+1) \in \mathbb{N}.$$

Exercice. On considère $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$
2. Donner un exemple de $x \in \mathbb{R}^* \backslash \{-1, 1\}$ vérifiant la propriété souhaitée.

Réponse.

1. On montre par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ l'assertion $P(n) : x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
   — Initialisation : $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z}$ et $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}$ par hypothèse sur x.

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n-1)$ et $P(n)$ soient vraies. Alors, grâce à l'hypothèse sur x et l'hypothèse de récurrence,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Or

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1}+\frac{1}{x^{n-1}}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Donc

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right) \in \mathbb{Z}.$$

— Conclusion : Le théorème de récurrence double permet de conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n+\frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

2. On cherche $x \in \mathbb{R}^*\backslash\{-1,1\}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x+\frac{1}{x}=n$$

i.e.

$$x^2-nx+1=0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré en x de discriminant

$$\Delta = n^2-4.$$

Donc si $|n|>2$ alors l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}, \quad x_2 = \frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2}.$$

Si $n=2$ alors l'équation une solution double qui est 1 et si $n=-2$ alors l'équation une solution double qui est -1.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3.$$

Réponse.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^3 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i}(2i)^3+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}(2i-1)^3\\
&= 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 6\sum_{i=1}^{n} i + n\\
&= n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)+n\\
&= n((n+1)(2n+1)-3(n+1)+1)\\
&= n((n+1)(2n-2)+1)
\end{aligned}$$

Question de cours. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice. On considère un intervalle réel I et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Ecrire la signification de
$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) = C.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
2. Ecrire avec des quantificateurs l'assertion : La fonction f présente un minimum sur I. Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
3. Ecrire la signification et la négation de
$$\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.

Réponse.

1. Cela signifie que la fonction f est constante. C'est d'ailleurs les seules fonctions qui vérifient cette propriété.
2. Avec des quantificateurs cela donne :
$$\exists x_0 \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0).$$
La fonction carrée admet 0 comme minimum et l'opposée de la fonction carrée n'admet pas de minimum.
3. Cela signifie que la fonction f ne possède jamais deux fois la même valeur. La fonction exp possède cette propriété mais pas la fonction carrée sur $\mathbb{R}$ par exemple.

Exercice. Montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|.$$

Réponse. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n) : |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.

1. Initialisation : $0 \leq 0$ donc $P(0)$ est vraie.
2. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Alors
$$|\sin((n+1)\theta)| = |\sin(n\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \leq (n+1)|\sin(\theta)|.$$
3. Conclusion : Le théorème de récurrence permet de conclure que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|.$$

Exercice. On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Réponse. Numérotons les billes de 1 à 9 et procédons par disjonction de cas :

1. Si le groupe de billes $1, 2, 3$ et le groupe de billes $4, 5, 6$ ont la même masse alors l'intrus n'est pas parmi mais parmi les billes $7, 8, 9$.
   (a) Si les billes 7 et 8 ont la même masse alors l'intrus est la bille 9.
   (b) Si la bille 7 est plus lourde que la bille 8 alors la bille 7 est l'intrus.
   (c) Si la bille 8 est plus lourde que la bille 7 alors la bille 8 est l'intrus.
2. Si le groupe de bille $1, 2, 3$ est plus lourd que le groupe de billes $4, 5, 6$ alors l'intrus est dans le groupe de billes $1, 2, 3$.
   (a) Si les billes 1 et 2 ont la même masse alors l'intrus est la bille 3.
   (b) Si la bille 1 est plus lourde que la bille 2 alors la bille 1 est l'intrus.

(c) Si la bille 2 est plus lourde que la bille 1 alors la bille 2 est l'intrus.

3. Si le groupe de bille $4, 5, 6$ est plus lourd que le groupe de billes $1, 2, 3$ alors l'intrus est dans le groupe de billes $4, 5, 6$.
   (a) Si les billes 4 et 5 ont la même masse alors l'intrus est la bille 6.
   (b) Si la bille 4 est plus lourde que la bille 5 alors la bille 4 est l'intrus.
   (c) Si la bille 5 est plus lourde que la bille 4 alors la bille 5 est l'intrus.

Exercice. On considère la fonction $f : x \longmapsto xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. On pose $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Etudier la continuité de la fonction f.
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction f en incluant les différentes limites. En déduire l'allure du graphique de la fonction f.

Réponse.

1. Nous devons avoir $x > 0$ pour la fonction ln et $x \neq 1$ pour $\dfrac{1}{\ln(x)}$. Par conséquent le domaine de définition de la fonction f est $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ comme composée de telles fonctions. De plus $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ comme composée de limites usuelles. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$, en notant $y = \ln(x)$,
$$f(x) = xe^{\frac{1}{\ln(x)}} = e^{\ln(x)+\frac{1}{\ln(x)}} = e^{y+\frac{1}{y}}.$$
Or
$$y + \frac{1}{y} \underset{y\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty, \quad y + \frac{1}{y} \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty,$$
d'où
$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0 = f(1), \quad f(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty \neq f(1).$$
Par conséquent la fonction f n'est pas continue en 1.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ comme composée de telles fonctions et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}, \quad f'(x) = e^{\frac{1}{\ln(x)}} + x\frac{1}{x}\frac{-1}{(\ln(x))^2}e^{\frac{1}{\ln(x)}} = \left(1 - \frac{1}{(\ln(x))^2}\right)e^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$
Par conséquent
$$f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$
Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ avec $f'(0) = 1$.
4. Nous avons, d'après le calcul à la question précédente,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}, \quad f'(x) \leq 0 \iff (\ln(x))^2 \leq 1 \iff \frac{1}{e} \leq x \leq e.$$
Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, e\right]$ puis strictement croissante sur $[e, +\infty[$.