**Question de cours.** Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

**Exercice.** On considère un intervalle réel $I$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Ecrire la signification de
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \leq M.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
2. Ecrire avec des quantificateurs l'assertion : La fonction $f$ ne prend jamais deux fois la même valeur. Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
3. Ecrire la signification et la négation de $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.

**Exercice.** Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists! p, k \in \mathbb{N}, \quad n = 2^k(2p+1).$$

**Exercice.** On considère un intervalle réel $I$, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et les assertions suivantes :
— $P : \forall x \in I, f(x) = 0.$
— $Q : \exists x \in I, f(x) = 0.$
— $R : [\forall x \in f(x) > 0]$ ou $[\forall x \in I, f(x) < 0].$

Parmi les implications suivantes, lesquelles sont vraies. Justifier si oui et donner un contre-exemple sinon.

1. $P \Longrightarrow Q$.
2. $Q \Longrightarrow P$.
3. $Q \Longrightarrow R$.
4. $non(R) \Longrightarrow Q$.
5. $non(Q) \Longrightarrow non(P)$.
6. $non(P) \Longrightarrow non(R)$.

**Exercice.** Soient $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x).$$

1. Calculer $P_n(x)$ pour $x \equiv 0[\pi]$.
2. Calculer $P_n(x)$ dans le cas contraire.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

*https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html*

**Question de cours.** Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**Exercice.** On considère un intervalle réel $I$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Ecrire la signification de
$$\forall x \in I, \quad f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
2. Ecrire avec des quantificateurs l'assertion : La fonction $f$ s'annule sur $I$. Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
3. Ecrire la signification et la négation de
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.

**Exercice.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

**Exercice.** On considère $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$
2. Donner un exemple de $x \in \mathbb{R}^* \backslash \{-1, 1\}$ vérifiant la propriété souhaitée.

**Exercice.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

*https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html*

**Question de cours.** Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

**Exercice.** On considère un intervalle réel $I$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Ecrire la signification de
$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad f(x) = C.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
2. Ecrire avec des quantificateurs l'assertion : La fonction $f$ présente un minimum sur $I$. Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.
3. Ecrire la signification et la négation de
$$\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$
Donner un exemple de fonction qui vérifie cette assertion et un exemple de fonction qui ne la vérifie pas.

**Exercice.** Montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|.$$

**Exercice.** On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

**Exercice.** On considère la fonction $f : x \longmapsto xe^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f$.
2. On pose $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Etudier la continuité de la fonction $f$.
3. Etudier la dérivabilité de la fonction $f$.
4. Etablir le tableau de variations de la fonction $f$ en incluant les différentes limites. En déduire l'allure du graphique de la fonction $f$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

*https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2425.html*