Question de cours. Retrouver et démontrer la formule de trigonométrie $\cos(a)\sin(b)$.

Question de cours. Simplifier pour $x \in \mathbb{R}$, $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Question de cours. La relation de congruence modulo 2π est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Exercice.

1. Résoudre l'inéquation $\sin(2x) \geq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $2(\cos(x))^2 - 3\cos(x) + 1 = 0$ sur $[0, 2\pi]$.

Réponse.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons, en posant $y = 2x$, $\sin(2x) \geq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ si et seulement si $\sin(y) \geq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, pour $y \in [0, 2\pi]$, si et seulement si $y \leq \dfrac{5\pi}{4}$ ou $y \geq \dfrac{7\pi}{4}$. Ainsi, si et seulement si

$$y \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$$

i.e. si et seulement si

$$x = \frac{y}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi\right].$$

2. Il s'agit d'une équation du second degré en $\cos(x)$ de discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ donc de solutions

$$r_1 = \frac{3+1}{4} = 1, \quad r_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi x est solution si et seulement si

$$\cos(x) = 1 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Donc si et seulement si, modulo 2π,

$$x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Exercice.

1. Calculer $\tan(3a)$ en fonction de $\tan(a)$ pour tout a correctement choisi.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$ différent de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}.$$

Réponse.

1. Nous avons, pour a tel que $t = \tan(a), \tan(2a), \tan(3a)$ aient du sens,

$$\begin{aligned}
\tan(3a) &= \tan(2a + a) \\
&= \frac{\tan(2a) + \tan(a)}{1 - \tan(2a)\tan(a)} \\
&= \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t}{1-t^2}t} \\
&= \frac{2t + t(1-t^2)}{1 - t^2 - 2t^2} \\
&= \frac{t(3-t^2)}{1-3t^2}.
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ différent de $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Alors

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \Longleftrightarrow \frac{3\tan(\theta) - \tan(\theta)^3}{1 - 3\tan(\theta)^2} = \frac{3\tan(\alpha) - \tan(\alpha)^3}{1 - 3\tan(\alpha)^2}$$

où $\theta = \arctan(x)$ et $a = \arctan(y)$. Donc, d'après la question précédente,

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \Longleftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3a) \Longleftrightarrow \theta \equiv a \left[\frac{\pi}{3}\right]$$

ce qui donne trois solutions $x_0 = \tan(\theta) = \tan(a) = y$,

$$x_1 = \tan\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{y + \sqrt{3}}{1 - y\sqrt{3}}$$

et

$$x_{-1} = \tan\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{y - \sqrt{3}}{1 + y\sqrt{3}}.$$

Question de cours. Retrouver et démontrer la formule de trigonométrie $\sin(a) - \sin(b)$.

Question de cours. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3\cos(x) + 4\sin(x) \end{array}$ admet un maximum et donner sa valeur.

Question de cours. Toute relation d'équivalence définit une partition de l'ensemble.

Exercice.

1. Résoudre l'inéquation $(\cos(x))^2 \geq \dfrac{3}{2}\cos(2x)$ sur $[-\pi, \pi]$.
2. Résoudre l'équation $|\cos(nx)| = 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Réponse.

1. Pour tout $x \in [-\pi, \pi], (\cos(x))^2 = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$. Donc $(\cos(x))^2 \geq \dfrac{3}{2}\cos(2x)$ si et seulement si $\cos(2x) \leq \dfrac{1}{2}$. Donc si et seulement si

$$2x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

i.e. si et seulement si

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right]$$

Donc, comme $x \in [-\pi, \pi]$, cela donne si et seulement si

$$x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $|\cos(nx)| = 1$ si et seulement si $\cos(nx) = 1$ ou $\cos(nx) = -1$. Donc si et seulement si

$$nx \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\{2k\pi\} \cup \{-\pi + 2k\pi\}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

i.e. si et seulement si

$$nx \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{k\pi}{n}\right\}.$$

Exercice.

1. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)$ pour $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la limite $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)\right)$.

Réponse.

1. Nous avons, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$,

$$\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \sin\left(2\frac{a}{2^k}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right).$$

Donc, par produit téléscopique,

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}.$$

2. Nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(a)}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{\sin(a)}{a}\right).$$

Question de cours. Exprimer et démontrer cos en fonction de tan.

Question de cours. Calculer pour $x \in [-1,1], \arccos(x) + \arcsin(x)$.

Question de cours. $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice.

1. Résoudre l'inéquation $\cos(3x) \geq \dfrac{1}{2}$ sur $[0, \pi]$.
2. Résoudre l'équation $\sin(x) = \tan(x)$ sur $[0, 2\pi]$.

Réponse.

1. Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Alors $\cos(3x) \geq \dfrac{1}{2}$ si et seulement si
$$3x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right]$$
i.e. si et seulement si
$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right]$$
i.e. comme $x \in [0, \pi]$, si et seulement si
$$x \in \left[0, \frac{\pi}{18}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \right] = \left[0, \frac{\pi}{18}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18} \right].$$

2. Soit $x \in [0, 2\pi]$. Si $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$ alors $\sin(x) = \tan(x)$ n'a pas de sens. Dans le cas contraire $\sin(x) = \tan(x)$ si et seulement si $\cos(x)\sin(x) = \sin(x)$ i.e. si et seulement si $\sin(x)(1-\cos(x)) = 0$ i.e. si et seulement si $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = 1$. Donc si et seulement si $x = 0, x = \pi$ ou $x = 2\pi$.

Exercice. Combien l'équation
$$\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0$$
possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Réponse. On considère la fonction $f : x \longmapsto \tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$. Le domaine de définition de f intersecté avec $[0, \pi]$ est pour $x \in [0, \pi]$ tel que
$$x \notin \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \right\}.$$

La fonction f y est continue sur chacun des intervalles dont les extrémités sont les points précédents et s'annule exactement une fois sur chacun de ces intervalles par étude de fonction.