Question de cours. Montrer que $\{x > 0, \forall y < 0, x < y\} = \varnothing$.

Question de cours. Décrire la géométrie des solutions en fonctions du paramètre réel m puis donner l'ensemble des solutions quand ce n'est pas un singleton.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & m+2 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & m+2 \end{array}\right.$$

Question de cours. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $(iz - z)\overline{z - i} \in i\mathbb{R}$. Décrire géométriquement les points correspondants.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée.

1. Montrer que les réels $\sup_{x\in\mathbb{R}} (\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y))$ et $\inf_{y\in\mathbb{R}} (\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y))$ sont bien définis.
2. Montrer que
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) \right) \leq \inf_{y\in\mathbb{R}} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, y) \right).$$
3. A-t-on égalité en général ? Si oui le démontrer. Si non déterminer un contre-exemple.

Exercice. On définit une relation binaire $\preceq$ sur le demi-plan complexe $P_i = \{z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ par, pour tout $z_1, z_2 \in P_i, z_1 \preceq z_2$ si $|z_1| < |z_2|$ ou $(|z_1| = |z_2|$ et $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2))$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre totale.
2. Peut-on étendre cette relation d'ordre sur $\mathbb{C}$?
3. Cette relation d'ordre est-elle compatible avec les opérations suivantes ?
   (a) $\forall z_1, z_2, z_3 \in P_i, z_1 \preceq z_2 \Longrightarrow z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3$
   (b) $\forall z_1, z_2 \in P_i, [0 \preceq z_1, 0 \preceq z_2] \Longrightarrow 0 \preceq z_1 z_2$
   (c) $\forall z \in P_i, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, 0 \preceq z \Longrightarrow 0 \preceq \lambda z$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et l'exprimer à partir de celles de A et B dont on aura justifié l'existence.

Question de cours. Décrire la géométrie des solutions en fonctions des paramètre réels a et b puis donner l'ensemble des solutions quand ce n'est pas un singleton.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire et son corollaire (sur $\mathbb{C}$). Préciser les cas d'égalité.

Exercice. On considère deux parties majorées non vides A et B de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la partie $A \cup B$ admet une borne supérieure et qu'elle vérifie
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B)).$$
2. On définit
$$A + B = \{a + b, \quad a \in A, b \in B\}.$$
Montrer que la partie $A + B$ admet une borne supérieure et qu'elle vérifie
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$
3. On définit de même
$$A \times B = \{ab, \quad a \in A, b \in B\}.$$
A-t-on également que la partie $A \times B$ admet une borne supérieure et qu'elle vérifie
$$\sup(A \times B) = \sup(A) \sup(B) \quad ?$$

Exercice.

1. On considère $E = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique $\leq_L$: pour tous $(k, n), (\ell, m) \in E$, $(k, n) \leq_L (\ell, m)$ si $k < \ell$ ou ($k = \ell$ et $n \leq m$). On considère également la partie $A = \{(0, n), n \in \mathbb{N}\}$ de l'ensemble E. Montrer que la partie A admet une borne supérieure mais pas de plus grand élément.
2. On considère maintenant $E = \{0, 1\} \times \mathbb{Z}$ muni encore de l'ordre lexicographique $\leq_L$. On considère également la partie $B = \{(0, n), n \in \mathbb{Z}\}$ de l'ensemble E. Montrer que la partie B est majorée mais n'admet pas de borne supérieure.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Montrer que l'application $A \longmapsto \sup(A)$ est croissante de l'ensemble des parties non vides majorées de $\mathbb{R}$ ordonné par l'inclusion dans $\mathbb{R}$ ordonné par $\leq$.

Question de cours. Décrire la géométrie des solutions en fonctions du paramètre réel m puis donner l'ensemble des solutions quand ce n'est pas un singleton.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & m^2z & = & m \\ mx & - & m^2y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3z & = & -1 \end{array}\right.$$

Question de cours. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $(iz - i)\overline{z - i} \in \mathbb{R}$. Décrire géométriquement les points correspondants.

Exercice.

1. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n(1-x).$$

Déterminer les réels suivants

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x), \qquad \sup_{x\in[0,1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}.$$

Déterminer les réels suivants

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} f_n(x), \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

3. Que peut-on en conclure ? A-t-on toujours une inégalité vérifiée ?

Exercice. On considère un ensemble E muni d'une relation $\mathcal{R}$ réflexive et transitive. On considère également la relation $\mathcal{S}$ sur E définie par, pour tout $x, y \in E, x\mathcal{S}y$ si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

1. Montrer que la relation $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble E.
2. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définit bien une relation d'ordre sur $E/\mathcal{S}$ les classes d'équivalence de la relation d'équivalence $\mathcal{S}$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html