Question de cours. Pour $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective. La réciproque est-elle vérifiée ?

Question de cours. Etudier le domaine de définition, de dérivabilité, la parité, calculer la dérivée et tracer l'allure de la courbe de la fonction th.

Question de cours. Pour $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x e^{at}\cos(bt)dt$.

Exercice. On considère trois réels a, b, c tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$, l'ensemble $E = \mathbb{R}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ et la fonction $f : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}.$$

Montrer que la fonction f est bien définie, bijective et déterminer sa fonction réciproque.

Réponse. Soit $x \in E$. Alors $f(x)$ a du sens car $cx - a \neq 0$. De plus $f(x) = \dfrac{a}{c}$ si et seulement si $ax + b = \dfrac{a}{c}(cx - a) = ax - \dfrac{a^2}{c}$ i.e. $a^2 + bc = 0$ ce qui n'est pas. Donc $f(x) \in E$ ce qui montre que l'application f est bien définie. Soient $y \in E$ et $x \in E$. Alors $f(x) = y$ si et seulement si $ax + b = y(cx - a) = cxy - ay$ i.e. $x = \dfrac{ay+b}{cy-a} = f(y)$ car $y \neq \dfrac{a}{c}$. Par conséquent nous avons $f \circ f = \mathrm{id}_E$ ce qui montre que l'application f est la fonction réciproque de la fonction f et donc est bijective.

Exercice. On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & |n|. \end{array}$

1. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer deux parties $A, B \subset \mathbb{Z}$ telles que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Déterminer une partie $C \subset \mathbb{Z}$ telle que $C \neq f^{-1}(f(C))$.
4. Déterminer une partie $D \subset \mathbb{N}$ telle que $D \neq f(f^{-1}(D))$.
5. Déterminer une partie $E \subset \mathbb{Z}$ telle que $f(E^c) \neq (f(E))^c$.

Réponse.

1. L'application f n'est pas surjective car $f(n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. L'application f n'est pas injective car $f(-1) = 1 = f(1)$ et $-1 \neq 1$. Donc l'application f n'est pas bijective.
2. On considère $A = \mathbb{N}$ et $B = -\mathbb{N}$. Alors $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ et $f(A) \cap f(B) = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$.
3. On considère $C = \mathbb{N}$. Alors $f(C) = \mathbb{N}$ et $f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$.
4. On considère $D = -\mathbb{N}$. Alors $f^{-1}(D) = \{0\}$ et $f(f^{-1}(D)) = f(\{0\}) = \{0\}$.
5. On considère $E = \mathbb{N}$. Alors $E^c = -\mathbb{N}^*$ et $f(E^c) = f(-\mathbb{N}^*) = \mathbb{N}^*$. De plus $f(E) = \mathbb{N}$ et $(f(E))^c = -\mathbb{N}^*$.

Exercice. On considère un ensemble E, deux parties $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que l'application f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante, l'application f est-elle bijective ?

Réponse.

1. On procède par double implications.
   - On suppose que l'application f est injective. Montrons que $A \cup B = E$. Or $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$ et $f(A) = (A, B)$. Donc, par injectivité, $A \cup B = E$.

- Réciproquement on suppose que $A \cup B = E$. Montrons que l'application f est injective. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. Donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Ainsi

  $$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y.$$

  Donc l'application f est injective.

2. On procède par double implications.

   - On suppose que l'application f est surjective. Montrons que $A \cap B = \varnothing$. Or, par surjectivité, $(A, \varnothing) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ admet un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$ par l'application f. Ainsi

     $$A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

   - Réciproquement on suppose que $A \cap B = \varnothing$. Montrons que l'application f est surjective. Soient $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $X = A' \cup B' \in \mathcal{P}(E)$. Alors

     $$X \cap A = (A' \cup B') \cap A = (A' \cap A) \cup (B' \cap A) = A \cup \varnothing = A$$

     et de même $X \cap B = B'$. Donc $f(X) = (A', B')$. Ainsi l'application f est surjective.

Question de cours. Pour $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. La réciproque est-elle vérifiée ?

Question de cours. Etudier le domaine de définition, de dérivabilité, la parité, calculer la dérivée et tracer l'allure de la courbe de la fonction arctan.

Question de cours. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x \dfrac{1}{t^2+2t+3} dt$.

Exercice. On considère trois ensembles E, F, G et quatre applications $f_1, f_2 : E \longrightarrow F, g_1, g_2 : F \longrightarrow G$.

1. Montrer que si $g_1 \circ f_1 = g_1 \circ f_2$ et g_1 injective alors $f_1 = f_2$.
2. Montrer que si $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_1$ et f_1 surjective alors $g_1 = g_2$.

Réponse.

1. On suppose que $g_1 \circ f_1 = g_1 \circ f_2$ et que g_1 est injective. Soit $x \in E$. Alors $g_1(f_1(x)) = g_1(f_2(x))$, d'où, par injectivité de g_1, $f_1(x) = f_2(x)$. Par conséquent $f_1 = f_2$.
2. n suppose que $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_1$ et que f_1 est surjective. Soit $y \in F$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f_1(x)$. Ainsi $g_1(y) = g_1(f_1(x)) = g_2(f_1(x)) = g_2(y)$. Par conséquent $f_1 = f_2$.

Exercice. On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|}. \end{array}$.

1. Montrer que l'application f est bien définie et bijective en utilisant la définition de l'injectivité et de la surjectivité
2. Montrer que l'application f est bijective par étude de fonction.

Réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $1 + |x| \geq 1 > 0$. Donc $\dfrac{x}{1+|x|}$ est bien défini et $\left|\dfrac{x}{1+|x|}\right| \leq 1$ car $|x| \leq 1 + |x|$.
   - Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\frac{x}{1+|x|} = f(x) = f(y) = \frac{y}{1+|y|}.$$
   Donc x et y sont de même signe. S'ils sont positifs alors
   $$(1+y)x = (1+x)y$$
   i.e. $x = y$. Donc l'application f est injective.
   - Soit $t \in]-1,1[$. Si $t \geq 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$f(x) = t \iff x = t(1+x) \iff x = \frac{t}{1-t}.$$
   Donc $\dfrac{t}{1-t}$ est un antécédent de t par l'application f. Si $t < 0$ alors de même $\dfrac{t}{1+t}$ est un antécédent de t par l'application f. Donc l'application f est surjective.
2. La fonction f vérifie
   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{|x|}\frac{1}{\frac{1}{|x|}+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$$
   et
   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{|x|}\frac{1}{\frac{1}{|x|}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
   De plus la fonction f est continue, donc par théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$. De plus la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de fonction dérivée f' vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si $x > 0$ alors
   $$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

et si $x < 0$ alors

$$f'(x) = \frac{1 - x + x}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2} > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par continuité, sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction f est injective. Par conséquent elle est bijective.

Exercice. On considère une application $f : E \longrightarrow F$. Montrer que l'application f est bijective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(A^c) = (f(A))^c.$$

Réponse. On procède par double implications.

- On suppose que l'application f est bijective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On procède par double inclusions.
  - Soit $y \in f(A^c)$. Alors il existe $x \in A^c$ tel que $y = f(x)$. On suppose par l'absurde que $y \in f(A)$. Alors il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = y = f(x)$. Donc, par injectivité, $x = x' \in A$ ce qui est absurde. Par conséquent $y \in (f(A))^c$.
  - Soit $y \in (f(A))^c$. Par surjectivité, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$ ce qui n'est pas. Donc $x \in A^c$ puis $y = f(x) \in f(A^c)$.
- On suppose que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(A^c) = (f(A))^c.$$

  On montre l'injectivité et la surjectivité de l'application f.
  - Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On suppose par l'absurde que $x_1 \neq x_2$. Alors $f(x_2) \in \{f(x_1)\} = f(\{x_1\})$ et $x_2 \in \{x_1\}^c$ donc $f(x_2) \in f(\{x_1\}^c) = (f(\{x_1\}))^c$ ce qui est absurde. Donc $x_1 = x_2$ ce qui montre que f est injective.
  - Nous avons, pour $A = E$, $(f(E))^c = f(E^c) = f(\varnothing) = \varnothing$. Donc $f(E) = F$ ce qui montrer que f est surjective.

Question de cours. Pour $f : E \longrightarrow F$, montrer que f admet une réciproque si et seulement si f est bijective.

Question de cours. Etudier le domaine de définition, de dérivabilité, la parité, calculer la dérivée et tracer l'allure de la courbe de la fonction sh.

Question de cours. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x \arctan(t)dt$.

Exercice. On considère l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Réponse. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \geq 0$ alors $2m$ est pair, positif et $f(2m) = m$. Si $m < 0$ alors $-1-2m$ est impair, positif et $f(-1-2m) = -\dfrac{-1-2m+1}{2} = m$. Par conséquent on considère l'application $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $m \in \mathbb{Z}, g(m) = 2m$ si $m \geq 0$ et $g(m) = -1-2m$ sinon. Ainsi $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Donc g est la bijection réciproque de l'application f ce qui montre que l'application f est bijective.

Exercice. On considère un ensemble E et une application $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que l'application f est injective si et seulement si elle est surjective.

Réponse. On procède par double implications.

- On suppose que l'application f est injective. Soit $y \in E$. Alors $f^3(y) = f(y)$. Donc, par injectivité, $f^2(y) = y$. Ainsi $f(y)$ est un antécédent de y par l'application f. Donc f est surjective.
- Réciproquement on suppose que l'application f est surjective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Or, par surjectivité, il existe $t_1, t_2 \in E$ tels que $x_1 = f(t_1), x_2 = f(t_2)$. Donc

  $$x_1 = f(t_1) = f^3(t_1) = f^2(f(t_1)) = f^2(x_1) = f^2(x_2) = f^3(t_2) = f(t_2) = x_2.$$

  Donc f est injective.

Exercice. On considère un ensemble E et une application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. On suppose que l'application f est croissante au sens de l'inclusion :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B).$$

Montrer qu'il existe une partie $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(B) = B$.

Réponse. On considère l'ensemble de parties

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset f(A)\} \subset \mathcal{P}(E)$$

et la partie

$$B = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{P}(E).$$

Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{S}, A \subset B$ et donc, par croissance de l'application f, $f(A) \subset f(B)$. Ainsi

$$B = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{S}} f(A) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{S}} f(B) = f(B).$$

Puis, encore par croissance, $f(B) \subset f(f(B))$. En particulier $f(B) \in \mathcal{S}$. Par conséquent $f(B) \subset B$ et enfin, par double inclusions, $f(B) = B$.