Question de cours. Pour $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective. La réciproque est-elle vérifiée ?

Question de cours. Etudier le domaine de définition, de dérivabilité, la parité, calculer la dérivée et tracer l'allure de la courbe de la fonction th.

Question de cours. Pour $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x e^{at}\cos(bt)dt$.

Exercice. On considère trois réels a, b, c tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$, l'ensemble $E = \mathbb{R}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ et la fonction $f : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}.$$

Montrer que la fonction f est bien définie, bijective et déterminer sa fonction réciproque.

Exercice. On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & |n|. \end{array}$

1. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Déterminer deux parties $A, B \subset \mathbb{Z}$ telles que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Déterminer une partie $C \subset \mathbb{Z}$ telle que $C \neq f^{-1}(f(C))$.
4. Déterminer une partie $D \subset \mathbb{N}$ telle que $D \neq f(f^{-1}(D))$.
5. Déterminer une partie $E \subset \mathbb{Z}$ telle que $f(E^c) \neq (f(E))^c$.

Exercice. On considère un ensemble E, deux parties $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que l'application f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante, l'application f est-elle bijective ?

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Pour $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective. La réciproque est-elle vérifiée ?

Question de cours. Etudier le domaine de définition, de dérivabilité, la parité, calculer la dérivée et tracer l'allure de la courbe de la fonction arctan.

Question de cours. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x \dfrac{1}{t^2 + 2t + 3} dt$.

Exercice. On considère trois ensembles E, F, G et quatre applications $f_1, f_2 : E \longrightarrow F, g_1, g_2 : F \longrightarrow G$.

1. Montrer que si $g_1 \circ f_1 = g_1 \circ f_2$ et g_1 injective alors $f_1 = f_2$.
2. Montrer que si $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_1$ et f_1 surjective alors $g_1 = g_2$.

Exercice. On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|}. \end{array}$.

1. Montrer que l'application f est bien définie et bijective en utilisant la définition de l'injectivité et de la surjectivité
2. Montrer que l'application f est bijective par étude de fonction.

Exercice. On considère une application $f : E \longrightarrow F$. Montrer que l'application f est bijective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f(A^c) = (f(A))^c.$$

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html

Question de cours. Pour $f : E \longrightarrow F$, montrer que f admet une réciproque si et seulement si f est bijective.

Question de cours. Etudier le domaine de définition, de dérivabilité, la parité, calculer la dérivée et tracer l'allure de la courbe de la fonction sh.

Question de cours. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x \arctan(t)dt$.

Exercice. On considère l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Montrer que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice. On considère un ensemble E et une application $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que l'application f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice. On considère un ensemble E et une application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. On suppose que l'application f est croissante au sens de l'inclusion :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B).$$

Montrer qu'il existe une partie $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(B) = B$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle en cherchant "Cacitti page personnelle" sur Google ou grâce à l'URL :

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2425.html