Question de cours. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{X}$,

$$\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}.$$

Question de cours. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2 + 2t + 3}.$$

Exercice. Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

1. Etudier le domaine de définition et la dérivabilité de la fonction $f_\lambda : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in D, \quad f_\lambda(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2}}.$$

2. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)dx.$$

Réponse.

1. La fonction f_λ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2 > 0$. Or

$$1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2 = (\lambda - \cos(x))^2 - \cos(x)^2 + 1 \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $\cos(x) = \lambda$ et $\cos(x) = \pm 1$ ce qui ne peut pas être car $\lambda \neq \pm 1$. Par conséquent nous avons $D = \mathbb{R}$. On en déduit également que la fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et composée de telles fonctions et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_\lambda'(x) &= \frac{\cos(x)\sqrt{1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2} - \frac{2\lambda\sin(x)}{2\sqrt{1-2\lambda\cos(x)+\lambda^2}}\sin(x)}{1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2} \\ &= \frac{\cos(x)(1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2) - 2\lambda\sin(x)^2}{(1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\cos(x)(1 + \lambda^2) - 2\lambda}{(1 - 2\lambda\cos(x) + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

2. On effectue le changement de variable $u = \cos(x), du = -\sin(x)dx$:

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)dx = \int_1^{-1} \frac{-du}{\sqrt{1 - 2\lambda u + \lambda^2}} = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - 2\lambda u + \lambda^2}}.$$

Donc si $\lambda \neq 0$ alors

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)dx = \left[\frac{2}{-2\lambda}\sqrt{1 - 2\lambda u + \lambda^2}\right]_{-1}^1 = -\frac{\sqrt{1 - 2\lambda + \lambda^2}}{\lambda} + \frac{\sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2}}{\lambda} = -\frac{|\lambda - 1|}{\lambda} + \frac{|\lambda + 1|}{\lambda}.$$

Donc si $\lambda > 1$ alors

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)dx = \frac{2}{\lambda},$$

si $\lambda < -1$ alors

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)dx = -\frac{2}{\lambda}$$

et si $\lambda \in]-1, 1[\backslash\{0\}$ alors

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)dx = 2.$$

Enfin si $\lambda = 0$ alors

$$\int_0^\pi f_\lambda(x)dx = \int_{-1}^1 du = 2.$$

Exercice. On définit une relation binaire $\preceq$ sur le demi-plan complexe $P_i = \{z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ par, pour tout $z_1, z_2 \in P_i, z_1 \preceq z_2$ si $|z_1| < |z_2|$ ou ($|z_1| = |z_2|$ et $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2)$).

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre totale.
2. Peut-on étendre cette relation d'ordre sur $\mathbb{C}$?
3. Cette relation d'ordre est-elle compatible avec les opérations suivantes ?
   (a) $\forall z_1, z_2, z_3 \in P_i, z_1 \preceq z_2 \Longrightarrow z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3$
   (b) $\forall z_1, z_2 \in P_i, [0 \preceq z_1, 0 \preceq z_2] \Longrightarrow 0 \preceq z_1 z_2$
   (c) $\forall z \in P_i, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, 0 \preceq z \Longrightarrow 0 \preceq \lambda z$

Réponse.

1. On vérifie les axiomes d'une relation d'ordre :
   - Réflexive : Soit $z \in P_i$. Alors $|z| = |z|$ et $\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}(z)$. Donc $z \preceq z$.
   - Transitive : Soient $z_1, z_2, z_3 \in P_i$ tels que $z_1 \preceq z_2$ et $z_2 \preceq z_3$. Alors nous avons les différents cas suivants.
     - Si $|z_1| < |z_2|$ et $|z_2| < |z_3$ alors $|z_1| < |z_3|$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
     - Si $|z_1| < |z_2|, |z_2| = |z_3|$ et $\mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_3)$ alors $|z_1| < |z_3$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
     - Si $|z_1| = |z_2|, \mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2)$ et $|z_2| < |z_3|$ alors $|z_1| < |z_3|$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
     - Si $|z_1| = |z_2||, \mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2), |z_2| = |z_3|$ et $\mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_3)$ alors $|z_1| = |z_3|$ et $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_3)$ et donc $z_1 \preceq z_3$.
   - Antisymétrie : Soient $z_1, z_2 \in P_i$ tels que $z_1 \preceq z_2$ et $z_2 \preceq z_1$. Etudions les différents cas.
     - $|z_1| < |z_2|$ est impossible car nous avons $|z_2| \leq |z_1|$.
     - $|z_2| > |z_1|$ est également impossible.
     - Il ne reste plus que $|z_1| = |z_2|, \mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_1)$. Ainsi $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$. Donc, comme $z_1, z_2 \in P_i$,

$$z_1 = \mathrm{Re}(z_1) + i\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Re}(z_1) + i\sqrt{|z_1|^2 - (\mathrm{Re}(z_1))^2} = \mathrm{Re}(z_2) + i\sqrt{|z_2|^2 - (\mathrm{Re}(z_2))^2} = z_2.$$

   Montrons maintenant que cette relation d'ordre est totale. Soit $z_1, z_2 \in P_i$. Etudions les différents cas :
   - Si $|z_1| < |z_2|$ alors $z_1 \preceq z_2$.
   - Si $|z_2| < |z_1|$ alors $z_2 \preceq z_1$.
   - Si $|z_1| = |z_2|$ et $\mathrm{Re}(z_1) \leq \mathrm{Re}(z_2)$ alors $z_1 \preceq z_2$.
   - Si $|z_1| = |z_2|$ et $\mathrm{Re}(z_2) \leq \mathrm{Re}(z_1)$ alors $z_2 \preceq z_1$.

   Par conséquent, dans tous les cas nous avons $z_1 \preceq z_2$ ou $z_2 \preceq z_1$.
2. Non nous ne pouvons pas étendre cette relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ car sinon $i \preceq -i$ et $-i \preceq i$ sans avoir $i = -i$.
3. (a) Soient $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1$. Alors $z_1, z_2, z_3 \in P_i, z_1 \preceq z_2, z_1 + z_3 = -1$ et $z_2 + z_3 = 0$. Donc nous n'avons pas $-1 = z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3 = 0$ car $|-1| = 1 > 0$.
   (b) Soient $z_1, z_2 \in P_i$ tels que $0 \preceq z_1$ et $0 \preceq z_2$.
   - Soit $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ et dans ce cas nous avons bien $0 = z_1 z_2 \preceq z_1 z_2$.
   - Soit $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. Alors $0 < |z_1|$ et $0 < |z_2|$. Ainsi $0 < |z_1 z_2|$. Donc $0 \preceq z_1 z_2$.

   (c) Soient $z \in P_i$ tel que $0 \preceq z$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
   - Soit $z = 0$ ou $\lambda = 0$ et dans ce cas $0 \preceq 0 = \lambda z$.
   - Soit $z \neq 0$ et $\lambda > 0$ et dans cas $0 < \lambda |z| = |\lambda z|$. Ainsi $0 \preceq \lambda z$.

Question de cours. Calculer, pour tout $x > 2$,

$$\int_2^x \frac{dt}{t^2-2}.$$

Question de cours. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x \arctan(t)dt.$$

Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de la primitive F_n de la fonction f_n qui s'annule en 0.
2. Déterminer une relation de récurrence entre F_{n+1} et F_n.
3. Donner l'expression des fonctions F_1, F_2 et F_3.

Réponse.

1. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet comme primitives $x \longmapsto \int_0^x f_n(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$. Ainsi la seule primitive qui s'annule en 0 est $F_n : x \longmapsto \int_0^x f_n(t)dt$.
2. Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\ &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} t dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt - 2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x) \end{aligned}$$

   i.e.

$$F_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)F_n(x).$$

3. Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(x),$$

$$F_2(x) = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

   et

$$F_3(x) = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}F_2(x) = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\arctan(x).$$

Exercice. On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|}. \end{array}$.

1. Montrer que l'application f est bien définie et bijective en utilisant la définition de l'injectivité et de la surjectivité
2. Montrer que l'application f est bijective par étude de fonction.

Réponse.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $1+|x| \geq 1 > 0$. Donc $\dfrac{x}{1+|x|}$ est bien défini et $\left|\dfrac{x}{1+|x|}\right| \leq 1$ car $|x| \leq 1+|x|$.

   - Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que
     $$\frac{x}{1+|x|} = f(x) = f(y) = \frac{y}{1+|y|}.$$
     Donc x et y sont de même signe. S'ils sont positifs alors
     $$(1+y)x = (1+x)y$$
     i.e. $x = y$. Donc l'application f est injective.
   - Soit $t \in]-1, 1[$. Si $t \geq 0$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
     $$f(x) = t \quad \Longleftrightarrow \quad x = t(1+x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{t}{1-t}.$$
     Donc $\dfrac{t}{1-t}$ est un antécédent de t par l'application f. Si $t < 0$ alors de même $\dfrac{t}{1+t}$ est un antécédent de t par l'application f. Donc l'application f est surjective.

2. La fonction f vérifie
   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{|x|}\frac{1}{\frac{1}{|x|}+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$$
   et
   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{|x|}\frac{1}{\frac{1}{|x|}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
   De plus la fonction f est continue, donc par théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. De plus la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de fonction dérivée f' vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, si $x > 0$ alors
   $$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$
   et si $x < 0$ alors
   $$f'(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$
   Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par continuité, sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction f est injective. Par conséquent elle est bijective.

Question de cours. Calculer, pour tout $x > 2$,

$$\int_2^x \frac{dt}{t^2 + 2t - 3}.$$

Question de cours. Calculer, pour tout $a, b, x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x e^{at} \sin(bt) dt.$$

Exercice. On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(t)^2}{\cos(2t)} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(t)^2}{\cos(2t)} dt.$$

1. Calculer $I - J$ et $I + J$.

2. En déduire les valeurs de I et J.

Réponse.

1. Nous avons

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(t)^2 - \sin(t)^2}{\cos(2t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}.$$

De plus

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos(2t)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin(2t)^2}}$$

On effectue le changement de variable $u = \sin(2t), du = 2\cos(2t)dt = 2\sqrt{1 - u^2}dt$:

$$I + J = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{2(1 - u^2)} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{1 - u} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{1 + u} = \frac{1}{4} \left[-\ln\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) \right].$$

Donc

$$I + J = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}\right).$$

2. On en déduit les valeurs de I et J grâce à

$$I = \frac{I - J}{2} + \frac{I + J}{2}, \quad J = \frac{I + J}{2} - \frac{I - J}{2}.$$

Exercice. On considère un ensemble E, deux parties $A, B \in \mathcal{P}(E)$ et l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que l'application f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2. Montrer que l'application f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

3. A quelle condition nécessaire et suffisante, l'application f est-elle bijective ?

Réponse.

1. On procède par double implications.

   - On suppose que l'application f est injective. Montrons que $A \cup B = E$. Or $f(A \cup B) = ((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B) = (A, B)$ et $f(A) = (A, B)$. Donc, par injectivité, $A \cup B = E$.
   - Réciproquement on suppose que $A \cup B = E$. Montrons que l'application f est injective. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$. Donc $X \cap A = Y \cap A$ et $X \cap B = Y \cap B$. Ainsi

     $$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y.$$

     Donc l'application f est injective.

2. On procède par double implications.

   - On suppose que l'application f est surjective. Montrons que $A \cap B = \varnothing$. Or, par surjectivité, $(A, \varnothing) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ admet un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$ par l'application f. Ainsi

$$A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

   - Réciproquement on suppose que $A \cap B = \varnothing$. Montrons que l'application f est surjective. Soient $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $X = A' \cup B' \in \mathcal{P}(E)$. Alors

$$X \cap A = (A' \cup B') \cap A = (A' \cap A) \cup (B' \cap A) = A \cup \varnothing = A$$

   et de même $X \cap B = B'$. Donc $f(X) = (A', B')$. Ainsi l'application f est surjective.