Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité triangulaire.

Exercice (Logique)**.** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la fonction f est constante,
2. la fonction f n'est pas constante,
3. la fonction f s'annule,
4. la fonction f est périodique.

Exercice (Ensembles)**.** On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3), \quad t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

Exercice (Réels et complexes)**.** On considère $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Montrer que

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la deuxième inégalité triangulaire à partir de la première.

Exercice (Ensembles)**.** On considère $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$. Peut-on écrire la partie D comme produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$?

Exercice (Réels et complexes)**.** Résoudre l'équation complexe $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice (Logique)**.** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Enoncer en langage courant les assertions suivantes et pour chacune donner une fonction qui la vérifie et une qui ne la vérifie pas si possible.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad f(x) < f(y)$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists T \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x + T)$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists T \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = f(x + T)$,
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y = f(x)$.

Question de cours. Quelles sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$? Le démontrer.

Exercice (Réels et complexes)**.** On considère $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité suivante :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Exercice (Logique)**.** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Enoncer en langage courant les assertions suivantes puis écrire la négation en quantificateurs.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$,
2. $\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \geq A, \quad f(x) > M$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0$,
4. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Exercice (Ensembles)**.** Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On définit la fonction de Dirac (ou fonction caractéristique) $\delta_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de la partie A par

$$\forall x \in E, \quad \delta_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si} x \notin A \end{cases}.$$

On considère également $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions de Dirac d'ensembles que l'on déterminera.

1. $1 - \delta_A$,
2. $\delta_A \times \delta_B$,
3. $\delta_A + \delta_B - \delta_A \times \delta_B$.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/∼dcaci409/Kholles2324.html