Question de cours. Enoncer et démontrer l'expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice (Sommes et produits)**.** Calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Correction. Nous avons $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Ainsi par somme télescopique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Exercice (Coefficients binomiaux et formule du binôme)**.** Calculer $(1+i)^{4n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2p}$ et $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}$.

Correction. Nous avons

$$(1+i)^{4n} = \sqrt{2}^{4n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{4n} = 4^n \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^{4n} = 4^n e^{i\pi n} = 4^n (-1)^n = (-4)^n,$$

et par formule du binôme

$$(1+i)^{4n} = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k = \sum_{l=0}^{2n} \binom{4n}{2l} i^{2l} + \sum_{l=0}^{2n-1} \binom{4n}{2l+1} i^{2l+1} = \sum_{l=0}^{2n} \binom{4n}{2l} (-1)^l + i \sum_{l=0}^{2n-1} \binom{4n}{2l+1} (-1)^l.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2p} = (-4)^n, \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2p+1} = 0.$$

Exercice (Sommes doubles)**.** Calculer la somme $\sum_{1 \leq i,j \leq n} 1$.

Correction. Nous avons

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} n = n^2.$$

Exercice (Système linéaire)**.** Résoudre le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-i)x & - & y & + & z & = & 2-i \\ ix & + & (1+i)y & - & iz & = & -1-i \\ x & + & (1-i)y & + & z & = & 1+i \end{array} \right. , \quad (x,y,z) \in \mathbb{C}^3.$$

Correction. Nous avons pour $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-i)x & - & y & + & z & = & 2-i \\ ix & + & (1+i)y & - & iz & = & -1-i \\ x & + & (1-i)y & + & z & = & 1+i \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - (1-i)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - iL_3 \\ \iff \end{array} \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & (-1-(1-i)(1-i))y & + & (1-(1-i))z & = & 2-i-(1-i)(1+i) \\ & & (1+i-(1-i)i)y & + & (-i-i)z & = & -1-i-i(1+i) \\ x & + & (1-i)y & + & z & = & 1+i \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & (-1+2i)y & + & iz & = & -i \\ & & & - & 2iz & = & -2i \\ x & + & (1-i)y & + & z & = & 1+i \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lll} z & = & 1 \\ y & = & -\frac{2i}{-1+2i} = -\frac{1}{5}2i(-1-2i) = \frac{-4+2i}{5} \\ x & = & i - (1-i)\frac{-4+2i}{5} = \end{array} \right.$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de Pascal.

Exercice (Sommes et produits)**.** Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Correction. Nous avons

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{\prod_{k=2}^{n+1}k}{\prod_{k=1}^{n}k}=n+1.$$

Exercice (Coefficients binomiaux et formule du binôme)**.** Déterminer une expression simplifiée de la somme $S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}$.

Correction. Nous avons par formule de Pascal

$$\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}-\binom{n+k}{n+1}.$$

Donc par somme télescopique

$$S=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+k}{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n+1}=\binom{2n+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}=\binom{2n+1}{n+1}.$$

Exercice (Sommes doubles)**.** Calculer les sommes $\sum_{1\leq i,j\leq n} j$ et $\sum_{1\leq i<j\leq n} j$.

Correction. Nous avons

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} j=\sum_{j=1}^{n}j\sum_{i=1}^{n}1=\frac{n(n+1)}{2}n=\frac{n^2(n+1)}{2},$$

et

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}=\sum_{j=1}^{n}j\sum_{i=1}^{j-1}1=\sum_{j=1}^{n}j(j-1)=\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Exercice (Système linéaire)**.** Résoudre le système linéaire suivant en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}\alpha x & + & y & + & z & = & 1\\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1\\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1\end{array}\right.\quad,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Correction. Si $\alpha=0$ alors le système admet comme une unique solution $x=y=z=\frac{1}{2}$. Sinon

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}\alpha x & + & y & + & z & = & 1\\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1\\ x & + & y & + & \alpha z & = & 1\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}L_2\leftarrow L_2-\frac{1}{\alpha}L_1\\ L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{\alpha}L_1\\ \Longleftrightarrow\end{array}\quad\left\{\begin{array}{ccccccc}\alpha x & + & y & + & z & = & 1\\ & & \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)y & + & \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)z & = & 1-\frac{1}{\alpha}\\ & & \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)y & + & \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)z & = & 1-\frac{1}{\alpha}\end{array}\right.$$

Puis si $\alpha=1$ alors le système est équivalent à

$$x+y+z=1$$

qui admet une infinité de solutions et qui sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sinon $\alpha - \dfrac{1}{\alpha} \neq 0$ et ainsi

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & \left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right) y & + & \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right) z & = & 1 - \dfrac{1}{\alpha} \\ & & \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right) y & + & \left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right) z & = & 1 - \dfrac{1}{\alpha} \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{\alpha - \frac{1}{\alpha}}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & \left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right) y & + & \left(1 - \dfrac{1}{\alpha}\right) z & = & 1 - \dfrac{1}{\alpha} \\ & & & & \left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2}{\alpha - \frac{1}{\alpha}}\right) z & = & 1 - \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \{$$

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule du binôme.

Exercice (Sommes et produits)**.** On considère la somme $S = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

1. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 4 tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = x^3.$$

2. En déduire une expression simplifié de S.

Correction.

1. On suppose qu'il existe un polynôme $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ tel que

$$\begin{aligned}
X^3 &= P(X+1) - P(X) \\
&= a(X+1)^4 + b(X+1)^3 + c(X+1)^2 + d(X+1) + e - aX^4 - bX^3 - cX^2 - dX - e \\
&= a\left(X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1\right) + b\left(X^3 + 3X^2 + 3X + 1\right) + c\left(X^2 + 2X + 1\right) + d(X+1) + e \\
&\quad - aX^4 - bX^3 - cX^2 - dX - e \\
&= 4aX^3 + (6a + 3b)\, X^2 + (4a + 3b + 2c)\, X + a + b + c + d.
\end{aligned}$$

Ainsi $a = \frac{1}{4}$ puis $b = -2a = -\frac{1}{2}$ puis $c = -\frac{4a+3b}{2} = -\frac{1 - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ puis $d = 0$ et $e \in \mathbb{R}$. Ainsi un polynôme possible est

$$P = \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2 = \frac{X^2}{4}(X^2 - 2X + 1) = \frac{X^2(X-1)^2}{4}.$$

2. Nous avons alors par somme telescopique

$$S = \sum_{k=2}^{n+1} P(k) - \sum_{k=1}^{n} P(k) = P(n+1) - P(1) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

Exercice (Coefficients binomiaux et formule du binôme)**.** Démontrer la formule pour $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$: $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Correction. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall p \in [\![0, n]\!], \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

L'initialisation pour $n = 0$ est immédiate :

$$\binom{0}{0} = 1 = \binom{1}{1}.$$

Puis on suppose $\mathcal{P}(n)$ vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n+1]\!]$. Alors par relation de récurrence puis formule de Pascal

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Le principe de récurrence permet de conclure.

Exercice (Sommes doubles)**.** Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n} k2^k$. Indication : On pourra écrire k comme une somme.

Correction. Nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k = \sum_{j=1}^{n} \frac{2^j - 2^{n+1}}{1-2} = n2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j = n2^{n+1} - \frac{2-2^{n+1}}{1-2} = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2.$$

Exercice (Système linéaire)**.** Résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{x} & + & 3y^2 & & & = & 2 \\ \frac{3}{x} & - & 2y^2 & - & \frac{1}{z^2} & = & 5 \\ & - & y^2 & + & \frac{1}{z^2} & = & 1 \end{array}\right. , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

Correction. On considère les inconnus intermédiaires $X = \frac{1}{x}, Y = y^2, Z = \frac{1}{z^2}$. Alors

$$\begin{array}{cl} & \left\{\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{x} & + & 3y^2 & & & = & 2 \\ \frac{3}{x} & - & 2y^2 & - & \frac{1}{z^2} & = & 5 \\ & - & y^2 & + & \frac{1}{z^2} & = & 1 \end{array}\right. \\ \iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} X & + & 3Y & & & = & 2 \\ 3X & - & 2Y & - & Z & = & 5 \\ & - & Y & + & Z & = & 1 \end{array}\right. \\ \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} & \left\{\begin{array}{ccccccc} X & + & 3Y & & & = & 2 \\ & - & 11Y & - & Z & = & -1 \\ & - & Y & + & Z & = & 1 \end{array}\right. \\ \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 11L_3}{\iff} & \left\{\begin{array}{ccccccc} X & + & 3Y & & & = & 2 \\ & & & - & 12Z & = & -12 \\ & - & Y & + & Z & = & 1 \end{array}\right. \\ \iff & Z = 1, \quad Y = 0, \quad X = 2 \\ \iff & z = \pm 1, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}. \end{array}$$