Question de cours. Montrer l'assertion suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Exercice. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexes. A-t-on $f \circ g$ convexe ? Question supplémentaire à l'oral : Que faut-il rajouter comme hypothèse supplémentaire ?

Correction. Nous n'avons pas nécessairement $f \circ g$ convexe. En effet par exemple avec $f = -X$ et $g = X^2$ convexes, nous avons $f \circ g = -X^2$ non convexe car strictement concave. Pour avoir $f \circ g$ convexe, nous devons avoir pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$,

$$(f \circ g)((1-t)x + ty) \leq (1-t)(f \circ g)(x) + t(f \circ g)(y).$$

Or nous avons déjà par convexité de la fonction g

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y).$$

Puis nous aimerions appliquer la fonction f des deux côtés pour utiliser sa convexité. Cependant pour conserver le sens de l'inégalité nous pouvons supposer la fonction f <u>croissante</u>. Dans ce cas

$$f(g((1-t)x + ty)) \leq f((1-t)g(x) + tg(y)) \leq (1-t)f(g(x)) + tf(g(y))$$

ce qui montre bien que la fonction $f \circ g$ est convexe.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer que la fonction f est continue. Montrer que la fonction racine carrée est un contre-exemple à la réciproque sur $\mathbb{R}_+$.

Correction. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$ tel que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_n) - f(a)| \leq k|x_n - a|.$$

Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons

$$\lim_{n \to +\infty} |f(x_n) - f(a)| = 0,$$

i.e. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Donc la fonction f est continue en tout $a \in \mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$. Réciproquement on considère la fonction $f = \sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on suppose par l'absurde qu'elle vérifie la propriété précédente. Alors, en particulier pour $x = 0$, nous avons

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{y} \leq ky.$$

Donc

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{\sqrt{y}} \leq k,$$

mais, en faisant tendre y vers 0, nous obtenons $+\infty \leq k$ ce qui est absurde.

Exercice. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = 0,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right).$$
2. En déduire que la fonction f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction.

1. On montre la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, nous avons directement que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de telles fonctions et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} P_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec P_1 la fonction polynomiale donnée par $P_1 = X^2$. On suppose le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la fonction f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe une fonction polynomiale P_n telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc la fonction $f^{(n)}$ est dériable comme composée de telles fonctions et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e^{-\frac{1}{x}} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

avec $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$ fonction polynomiale. Le principe de récurrence permet de conclure.

2. Nous avons donc que la fonction f est n-fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et également sur $\mathbb{R}_-^*$, avec $(f^{(n)})_{|\mathbb{R}_-^*} = 0$. Par conséquent nous avons par croissance comparée

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = 0 = \lim_{x \searrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x}.$$

Donc la fonction f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question de cours. Montrer que la fonction exp et dérivable et calculer sa fonction dérivée.

Exercice. Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée ?

Correction. Il s'agit d'une fonction constante. On suppose par l'absurde qu'il existe deux réels $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$, par exemple $f(a) < f(b)$. Or par convexité nous avons que la courbe de la fonction f est au dessus de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Autrement dit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

avec $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$. De plus nous avons que la fonction f est majorée, donc, par inégalité, la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ ce qui est absurde. Par conséquent la fonction f est constante.

Exercice. On considère $a \in \mathbb{R}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = (ax)^2,$$

et

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Pour quelle(s) valeur(s) de la constante a, la fonction f est-elle continue ?

Correction. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ comme composée de telles fonctions. Puis en 1, nous avons

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = a \lim_{x \nearrow 1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a,$$

et

$$\lim_{x \searrow 1} f(x) = a^2 \lim_{x \searrow 1} x^2 = a^2.$$

Donc la fonction f est continue en 1 si et seulement si $a^2 = a$ i.e. $a \in \{0, 1\}$.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $g = |f|$. Etudier la dérivabilité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Correction. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $f(a) > 0$ alors, par continuité de la fonction f, pour $x \to a$, nous avons $f(x) > 0$. Donc, par dérivabilité de la fonction f :
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$
Donc la fonction g est dérivable en a et $g'(a) = f'(a)$.
2. De même si $f(a) < 0$, nous avons
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -f'(a).$$
3. Si $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$ alors nous ne pouvons plus procéder comme précédemment. Nous avons tout de même par seconde inégalité triangulaire
$$\lim_{x \to a} \left|\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right| \leq \lim_{x \to a} \left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| = 0.$$
Donc la fonction g est dérivable en a et $g'(a) = 0$.
4. Si $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$ alors nous ne pouvons plus procéder comme précédemment. Nous avons tout de même que la fonction f n'admet d'extremum en a. Nous pouvons supposer, quitte à considérer $-f$, qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) < 0$ pour $x \in [a-\delta, a[$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]a, a+\delta]$. Alors, comme précédemment,
$$\lim_{x \nearrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -f'(a),$$
et
$$\lim_{x \searrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) \neq -f'(a).$$
Donc la fonction g n'est pas dérivable en a.

Finalement nous avons que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a \in \mathbb{R},\ f(a) = 0, f'(a) \neq 0\}$ et pour tout a dans cette ensemble, nous avons $g'(a) = \text{signe}(f(a))f'(a)$.

Question de cours. Montrer la limite suivante

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Exercice. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

et

$$\forall x \in \{-1,0,1\}, f(x) = 0.$$

Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Correction. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ est continue comme composée de telles fonctions. Puis en 0 nous avons

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty \neq 0.$$

Donc la fonction f n'est pas continue en 0. Puis en 1 ou en -1 nous avons

$$\lim_{x\to\pm 1} f(x) = \ln(1) = 0 = f(x).$$

Donc la fonction f est continue en -1 et en 1.

Exercice. On considère une fonction $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0, f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Correction. Nous avons

$$0 < f'(a) = \lim_{x\searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Donc il existe $a' \in \,]a,b[$ proche de a tel que $f(a') > f(a) = 0$. De même

$$0 < f'(b) = \lim_{x\nearrow a} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Donc il existe $b' \in \,]a,b[$ proche de b tel que $f(b') < f(b) = 0$. Par conséquent, par théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f sur $[a',b']$, nous avons l'existence de $c \in \,]a',b'[\, \subset \,]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$. Déterminer $s \in [0,1]$ dépendant de x, y, t tel que

$$\frac{1}{(1-t)x+ty} = (1-s)X + sY,$$

avec $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$. Déterminer également l'expression de t en fonction de s, X, Y.

2. En déduire que la fonction $x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est convexe si et seulement si la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe.

Correction.

1. Nous avons en effet

$$\frac{1}{(1-t)x+ty} = \frac{1-t+t}{(1-t)x+ty} = \frac{1-t}{(1-t)x+ty} + \frac{t}{(1-t)x+ty} = \frac{(1-t)x}{(1-t)x+ty}\frac{1}{x} + \frac{ty}{(1-t)x+ty}\frac{1}{y}.$$

Donc, en considérant $s = \dfrac{ty}{(1-t)x+ty}$, nous avons bien

$$1-s = \frac{(1-t)x+ty-ty}{(1-t)x+ty} = \frac{(1-t)x}{(1-t)x+ty},$$

et

$$\frac{1}{(1-t)x+ty} = (1-s)\frac{1}{x} + s\frac{1}{y} = (1-s)X + sY.$$

De plus nous avons après résolution

$$t = \frac{sx}{sx+(1-s)y} = \frac{\frac{s}{X}}{\frac{s}{X}+\frac{1-s}{Y}} = \frac{sY}{(1-s)X+sY}.$$

2. On suppose que la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0,1]$. On considère s, X, Y comme à la question précédente. Alors

$$f\left(\frac{1}{(1-t)x+ty}\right) = \frac{1}{(1-s)X+sY}((1-s)X+sY)f((1-s)X+sY)$$

$$\leq \frac{1}{(1-s)X+sY}((1-s)Xf(X)+sYf(Y)) = (1-t)f\left(\frac{1}{x}\right) + tf\left(\frac{1}{y}\right).$$

Donc la fonction $f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ est convexe. Réciproquement on suppose que la fonction $f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ est convexe. Soit $X, Y \in \mathbb{R}_+^*$ et $s \in [0,1]$. On pose alors $x = \frac{1}{X}, y = \frac{1}{Y}$ et $t = \frac{sx}{sx+(1-s)y}$ pour avoir $s = \frac{ty}{(1-t)x+ty}$. Ainsi

$$((1-s)X+sY)f((1-s)X+sY) = \frac{1}{(1-t)x+ty}f\left(\frac{1}{(1-t)x+ty}\right).$$

Puis, par convexité de la fonction $f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ et $\frac{1}{(1-t)x+ty} \geq 0$,

$$((1-s)X+sY)f((1-s)X+sY) \leq \frac{1}{(1-t)x+ty}\left((1-t)f\left(\frac{1}{x}\right)+tf\left(\frac{1}{y}\right)\right) = (1-s)f\left(\frac{1}{x}\right)+sf\left(\frac{1}{y}\right).$$

Donc la fonction $f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$ est convexe.