Question de cours. Montrer l'assertion suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Exercice. On considère deux fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexes. A-t-on $f \circ g$ convexe ?

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer que la fonction f est continue. Montrer que la fonction racine carrée est un contre-exemple à la réciproque sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = 0,$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une fonction polynomiale P_n telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right).$$
2. En déduire que la fonction f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question de cours. Montrer que la fonction exp et dérivable et calculer sa fonction dérivée.

Exercice. Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et majorée ?

Exercice. On considère $a \in \mathbb{R}$ et la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = (ax)^2,$$

et

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Pour quelle(s) valeur(s) de la constante a, la fonction f est-elle continue ?

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $g = |f|$. Etudier la dérivabilité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Question de cours. Montrer la limite suivante

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Exercice. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

et

$$\forall x \in \{-1, 0, 1\}, f(x) = 0.$$

Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice. On considère une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0, f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice. On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [0, 1]$. Déterminer $s \in [0, 1]$ dépendant de x, y, t tel que

$$\frac{1}{(1-t)x + ty} = (1-s)X + sY,$$

   avec $X = \dfrac{1}{x}$ et $Y = \dfrac{1}{y}$. Déterminer également l'expression de t en fonction de s, X, Y.

2. En déduire que la fonction $x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est convexe si et seulement si la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2324.html