Question de cours (Question de cours)**.** Montrer l'assertion suivante

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad \exp(i(\theta + \theta')) = \exp(i\theta) \times \exp(i\theta).$$

Exercice (Géométrie)**.** On considère la similitude directe du plan de centre 0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Ecrire la fonction complexe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ correspondante.
2. Soit $z_0 = 1$. Représenter sur le plan complexe les points z_0 et
$$z_n = f(z_{n-1})$$
pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
3. Déterminer la longueur de la courbe brisée formée par les points $z_0, ..., z_n, ..., z_\infty$.

Correction.

1. Nous avons
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2} z = \frac{i}{2} z.$$
2. (Il s'agit d'une spirale brisée.)
3. On note L la longueur de la courbe brisée. Alors
$$L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} |z_{k+1} - z_k|,$$
avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$z_k = f^k(1) = (f \circ ... \circ f)(1) = \frac{i^k}{2^k}.$$
Donc
$$|z_{k+1} - z_k| = \left| \frac{i^{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{i^k}{2^k} \right| = \frac{|i|^k}{2^k} \left| \frac{i}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2^k} \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2^k} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$
Ainsi
$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\sqrt{5}}{2} \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

Exercice (Trigonométrie)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos(2x) + \cos(x) = 0.$$

Citer deux méthodes et en détailler une.

Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(2x)+\cos(x) = 0$. Nous avons au moins deux méthodes de résolution :

1. Nous avons
$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1.$$
Donc, en notant $X = \cos(x)$, nous obtenons
$$2X^2 + X - 1 = 0.$$
Ainsi, après résolution de l'équation du second degré,
$$\cos(x) = X = -1 \quad \text{ou} \quad \cos(x) = X = \frac{1}{2}.$$
Donc, modulo 2π,
$$x \in \left\{ \pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \right\}.$$
Réciproquement les x appartenant à cette ensemble vérifient l'équation souhaitée.

2. Nous avons également

$$0 = \cos(2x) + \cos(x) = 2\cos\left(\frac{2x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Donc

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

i.e.

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \pi + 2k\pi.$$

On retrouve la même conclusion qu'avec la première méthode.

Exercice (Complexes)**.** On considère $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Montrer que

$$|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}.$$

Correction. On suppose que $|z| = 1$. Alors l'écriture exponentielle de z s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\theta \neq 0$ car $z \neq 1$. Ainsi

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \in i\mathbb{R}.$$

Réciproquement on suppose que $\dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$. Alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1+z}{1-z} = ia$, i.e.

$$1 + z = ia(1-z) = ia - iaz,$$

i.e.

$$z = \frac{ia-1}{ia+1}.$$

Donc

$$|z| = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}} = 1.$$

Question de cours. Donner les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Le démontrer.

Exercice (Trigonométrie)**.** Résoudre le système suivant d'inconnue $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2\cos(x) & + & 3\sin(y) & = & \sqrt{2} - \dfrac{3}{2} \\ 4\cos(x) & + & \sin(y) & = & 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Correction. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant le système précédent. On considère les réels

$$X = \cos(x), \quad Y = \sin(y).$$

Alors le couple (X, Y) vérifie le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2X & + & 3Y & = & \sqrt{2} - \dfrac{3}{2} \\ 4X & + & Y & = & 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Alors l'opération $L_2 - 2 \times L_1$ donne

$$-5Y = Y - 6Y = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - 2\sqrt{2} + \frac{6}{2} = \frac{5}{2}, \quad \text{i.e.} \quad Y = -\frac{1}{2}.$$

De même l'opération $L_1 - 3 \times L_2$ donne

$$-10X = 2X - 12X = \sqrt{2} - \frac{3}{2} - 6\sqrt{2} + \frac{3}{2} = -5\sqrt{2}, \quad \text{i.e.} \quad X = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par conséquent, modulo 2π,

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}, \quad y \in \left\{-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Réciproquement si x, y appartiennent aux deux ensembles précédents alors le couple (x, y) vérifie le système souhaité.

Exercice (Complexes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une fonction polynomiale réelle T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)).$$

Correction. Nous avons, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(e^{in\theta})$ et, par formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= (e^{i\theta})^n = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} i^k \sin(\theta)^k \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ pair}}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} i^k \sin(\theta)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ impair}}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} i^k \sin(\theta)^k \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \cos(\theta)^{n-2l} i^{2l} \sin(\theta)^{2l} + \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2l+1} \cos(\theta)^{n-(2l+1)} i^{2l+1} \sin(\theta)^{2l+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \cos(\theta)^{n-2l} (-1)^l \sin(\theta)^{2l} + i \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2l+1} \cos(\theta)^{n-(2l+1)} (-1)^l \sin(\theta)^{2l+1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\cos(n\theta) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \cos(\theta)^{n-2l} (-1)^l \sin(\theta)^{2l} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \cos(\theta)^{n-2l} (-1)^l (1 - \cos(\theta))^{2l} = T_n(\cos(\theta)),$$

avec T_n la fonction polynomiale réelle définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(x) = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} x^{n-2l} (-1)^l (1 - x)^{2l}.$$

Exercice (Géométrie)**.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $f_1 : z \longmapsto iz$,
2. $f_2 : z \longmapsto z + 1 + i$,
3. $f_3 : z \longmapsto (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.

Correction.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ alors $f_1(z) = 0 = z$ et si $z \neq 0$ alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z = re^{i\theta}$. Ainsi
$$f_1(z) = iz = e^{i\frac{\pi}{2}} re^{i\theta} = re^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}.$$
Donc le module ne change pas mais l'argument augmente de $\frac{\pi}{4}$. La fonction f_1 correspond donc à une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Ainsi
$$f_2(z) = z + 1 + i = a + 1 + i(b + 1).$$
Donc la fonction f_2 correspond à une translation de vecteur $(1, 1)$.
3. La fonction f_3 correspond à une similitude directe de centre, de rapport et d'angle à déterminer. Le centre correspond au complexe invariant : $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que
$$z_0 = f_3(z_0) = (1 + i\sqrt{3})z_0 + \sqrt{3}(1 - i),$$
i.e.
$$z_0 = -\frac{\sqrt{3}(1 - i)}{i\sqrt{3}} = 1 + i.$$
Nous avons
$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1 + 3} = 2,$$
et
$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$
Donc la fonction f_3 correspond à une similitude directe de centre $(1, 1)$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Question de cours. Donner l'expression simple de $\arccos(x) + \arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Le démontrer.

Exercice (Complexes)**.** Résoudre l'équation complexe $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Correction. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant l'équation. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. De plus nous pouvons écrire $3\sqrt{3} - 3i$ sous forme exponentielle :

$$|3\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{27 + 9} = \sqrt{36} = 6.$$

Ainsi

$$3\sqrt{3} - 3i = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 6e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc

$$6e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^z = e^a e^{ib},$$

i.e.

$$a = \ln(6), \quad b = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Réciproquement on vérifie que tous les $z = \ln(6) + i\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ satisfont l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice (Géométrie)**.** Soit $a \in \mathbb{U}$ un complexe de module 1.

1. Ecrire l'expression des solutions z_k de l'équation $z^n = a$ en fonction de l'argument du complexe a.
2. Montrer que les points d'affixe $(1 + z_k)^n$ sont alignés.

Correction.

1. On note $\theta \in [0, 2\pi[$ l'argument du complexe a. Alors, pour $z = re^{i\theta'} \in \mathbb{C}^*$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta' \in [0, 2\pi[$, nous avons

$$z^n = a \iff r^n e^{in\theta'} = e^{i\theta} \iff \begin{cases} r &= 1 \\ \theta' &= \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}, \quad k \in [\![0, n-1]\!] \end{cases}.$$

   Donc les solutions de l'équation $z^n = a$ sont de la forme

$$z_k = e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

2. Pour montrer l'alignement nous avons besoin de l'argument des différents complexes :

$$1 + z_k = 1 + e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\theta+2k\pi}{2n}} + e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}\right) = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2n}}\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right).$$

   Donc

$$(1 + z_k)^n = e^{i\frac{\theta+2k\pi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right)\right)^n = e^{i\frac{\theta}{2}}(-1)^k\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right)\right)^n.$$

   Donc toutes les points d'affixe $(1 + z_k)^n$ se situe sur la droite faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses i.e. d'équation $y = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)x$. Ainsi ces points sont alignés.

Exercice (Trigonométrie)**.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(3x)(\cos(x))^3.$$

1. Etudier la parité et la périodicité de la fonction f. En déduire un intervalle d'étude suffisant.
2. Déterminer les sens de variation de la fonction f sur cet intervalle.

Correction.

1. Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \cos(-3x)(\cos(-x))^3 = \cos(3x)(\cos(x))^3 = f(x),$$

et

$$f(x+\pi) = \cos(3(x+\pi))(\cos(x+\pi))^3 = -\cos(3x)(-\cos(x))^3 = \cos(3x)\cos(x)^3 = f(x).$$

Donc la fonction f est paire et π-périodique. Un intervalle d'étude suffisant est donc $I = [0, \pi]$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3\sin(3x)(\cos(x))^3 - \cos(3x)3\sin(x)(\cos(x))^2 = -3\cos(x)^2(\sin(3x)\cos(x) + \cos(3x)\sin(x))$$

$$= -3\cos(x)^2\sin(4x).$$

On en déduit le tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

.