Exercice (Exercice n°15)**.** On considère un espace euclidien E et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes :

1. $(F^\perp)^\perp = F$,
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1\times 3\times 5\times ...\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times ...\times 2n}.$$

1. Peut-on cloncure sur la converge de la série $\sum u_n$ à partir de la règle de D'Alembert ?
2. Montrer que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Que peut-on en conclure ?

Correction.

1. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1\times 3\times 5\times ...\times(2n-1)\times(2n+1)}{2\times 4\times 6\times ...\times 2n\times 2(n+1)}\frac{2\times 4\times 6\times ...\times 2n}{1\times 3\times 5\times ...\times(2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure.

2. Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+2)} = \frac{2n+1}{2n} \geq 1.$$

Alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq \frac{1}{n},$$

avec $\sum \frac{1}{n}$ divergente, donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \frac{S_1 + ... + S_n}{n}$$

1. Montrer que si la série est $\sum u_n$ est convergente alors elle converge au sens de Cesàro.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas et qu'elle converge au sens de Cesàro.

Correction.

1. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente de somme S. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|S_n - S| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus nous avons

$$|T_n - S| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k - S| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|S_k - S| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k - S| + \underbrace{\frac{n-N}{n}}_{\leq 1}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k - S| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N' \geq N$ tel que, pour tout $n \geq N'$,

$$|T_n - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exercice (Exercice n°12)**.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM.$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$.
2. L'application f est-elle surjective.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $M_2(\mathbb{R}) = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$?

Exercice. Déterminer un équivalent simple de la suite des restes partielles de la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ avec le paramètre $\alpha \in [1, +\infty[$.

Correction. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, donc

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Ainsi, par sommation entre $n+1 \in \mathbb{N}$ et $N \geq n+1$,

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n}^{N} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Or

$$\int_n^N \frac{dt}{t^\alpha} = \int_n^N t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_n^N = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}},$$

et de même

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}.$$

Donc

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Ainsi

$$\left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha-1} \leq (\alpha-1)n^{\alpha-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1.$$

Par conséquent

$$(\alpha-1)n^{\alpha-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,$$

i.e.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice. On considère $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x^n}{y^n + n}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon la position du point (x, y) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. On suppose $|y| > 1$. Alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{y} \right)^n.$$

Donc :

(a) Si $|x| \geq |y|$ alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^n \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

(b) Si $|x| < |y|$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente car

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{x}{y}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{y}\right| < 1.$$

2. On suppose $|y| \leq 1$. Alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{n}.$$

Donc :

(a) Si $|x| < 1$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente car

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

(b) Si $|x| > 1$ alors $|x| > |y|$. Ainsi la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente comme précédemment.

(c) Si $x = 1$ alors, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.

(d) Si $x = -1$ alors nous ne pouvons pas appliquer le résultat précédent. Autrement nous

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1+\dfrac{y^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

avec, par critère des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ convergente, et, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ absolument convergente. Donc la série $\sum$ est convergente.

Exercice (Exercice n°2)**.** On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

$$u_0 = x_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \arctan(u_n).$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h(\arctan(x)).$$

Exercice. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. Montrer que $\sum v_n$ est une série convergente.
3. Montrer que $\sum u_n$ est une série divergente.
4. Pourquoi les réponses aux questions précédentes ne mettent pas en défaut le théorème concernant les séries dont les termes sont équivalents ?

Correction.

1. Nous avons
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = v_n\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$$
avec $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées, donc est est convergente.
3. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum v_n$ converge d'après ce qui précède et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc, par sommation la série $\sum u_n = \sum v_n + \sum \frac{1}{n}$ diverge.
4. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas à termes positifs (ou négatifs).

Exercice. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}.$$

Correction. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Puis, par relation de Chasles,

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

i.e.

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or, par propriétés de la fonction ln,

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(n) = (n-1)\ln(n)$$

Donc, pour $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)(n-1)} \geq \frac{1}{n-1}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n-1}$ diverge, donc, par théorème de comparaison, la série $\sum u_n$ diverge.