Exercice (Exercice n°27)**.** Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand $n \to +\infty$ de deux manières différentes :

1. en utilisant une comparaison série-intégrale,
2. en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice. Etablir la convergence puis calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}, \quad n \geq 3.$$

Correction. Nous avons

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}.$$

Or le série $\sum \frac{2}{n^2}$ est convergente, donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs équivalents, la série $\sum u_n$ est convergente. Nous avons également

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)}.$$

Puis par décomposition en éléments simples il existe $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}.$$

Or

$$\frac{2X-1}{(X-2)(X+2)} = a + \frac{X}{X-2}b + \frac{X}{X+2}c, \frac{2X-1}{X(X+2)} = \frac{X-2}{X}a + b + \frac{X-2}{X+2}c, \frac{2X-1}{X(X-2)} = \frac{X+2}{X}a + \frac{X+2}{X-2}b + c.$$

Donc, en évaluant en $0, 2, -2$, nous obtenons $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{8}, c = -\frac{5}{8}$. Ainsi

$$\forall n \geq 3, \quad u_n = \frac{3}{8}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{n} - \frac{5}{8}\frac{1}{n+2}.$$

Donc, par sommes telescopiques,

$$\forall N \geq 3, \quad \sum_{n=3}^{N} u_n = \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{3}{8}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{n} - \frac{5}{8}\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{5}{8}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n}.$$

Puis, après simplification,

$$\sum_{n=3}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{=} \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + o(1).$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{89}{96}$.

Exercice. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, k-lipschitziennes, et convergeant simplement vers $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction. Nous avons par hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x-y|$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, par convergence simple, on obtient que f est k-lipschizienne. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à ε. Soit $x \in [a, b]$, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$, alors, par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)|.$$

Puis, par k-lipschiziennité,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2k|x - a_i| + |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq 2k\varepsilon + |f_n(a_i) - f(a_i)|.$$

Or pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $f_n(a_i) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a_i)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ (indépendant de x) tel que

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall n \geq N, |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq 2k\varepsilon + \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq (2k+1)\varepsilon$$

ce qui montre bien que la convergence est uniforme.

Exercice (Exercice n°29)**.** On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}dx$.

Exercice. On considère $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x^n}{y^n+n}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon la position du point (x,y) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. On suppose $|y| > 1$. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{y}\right)^n.$$
Donc :
   (a) Si $|x| \geq |y|$ alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{x}{y}\right)^n \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
   (b) Si $|x| < |y|$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente car
$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\frac{x}{y}\right|^n, \quad \left|\frac{x}{y}\right| < 1.$$
2. On suppose $|y| \leq 1$. Alors
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{n}.$$
Donc :
   (a) Si $|x| < 1$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente car
$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^n}{n}, \quad |x| < 1.$$
   (b) Si $|x| > 1$ alors $|x| > |y|$. Ainsi la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente comme précédemment.
   (c) Si $x = 1$ alors, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.
   (d) Si $x = -1$ alors nous ne pouvons pas appliquer le résultat précédent. Autrement nous
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\dfrac{y^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$
avec, par critère des séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ convergente, et, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ absolument convergente. Donc la série $\sum$ est convergente.

Exercice. On considère la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Correction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :
   (a) Si $x < 0$ alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.
   (b) Si $x \geq 0$ alors $f_n(x)$ est le terme général d'une série alternée tel que $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant. Donc, par critère des séries alternées, $\sum f_n(x)$ est convergente.

   Par conséquent $\Delta = \mathbb{R}_+$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par critère des séries alternées,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

   D'où R_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus tous les f_n sont continues, donc, par théorème de continuité sous le signe somme, $f = \sum f_n$ est continue.

Exercice (Exercice n°30)**.**

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est continue sur $[a,b]$.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall x\in[0,1], g_n(x)=x^n$. Cette suite converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge où

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad T_n=\frac{S_1+...+S_n}{n}$$

1. Montrer que si la série est $\sum u_n$ est convergente alors elle converge au sens de Cesàro.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ ne converge pas et qu'elle converge au sens de Cesàro.

Correction.

1. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente de somme S. Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Alors il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geq N$,
$$|S_n-S|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$
De plus nous avons
$$|T_n-S|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k-S|+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|S_k-S|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k-S|+\underbrace{\frac{n-N}{n}}_{\leq 1}\frac{\varepsilon}{2}.$$
Or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k-S|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc il existe $N'\geq N$ tel que, pour tout $n\geq N'$,
$$|T_n-S|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\forall z\in\mathbb{C},\quad f_n(z)=1+z+...+z^n$$

1. Soit $a\in[0,1[$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(z)=(1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a)=\{z\in\mathbb{C},|z|\leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur le disque unité ouvert $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C},|z|<1\}$.

Correction.

1. Soit $z\in\overline{D}(0,a)$. Nous avons
$$\forall n\in\mathbb{N},|f_n(z)-f(z)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}z^k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}a^k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
car $a\in[0,1[$. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z)=(1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a)$.
2. Soit $z\in D(0,1)$, alors, d'après ce qui précède
$$f_n(z)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}f(z)$$
Mais, pour $x\in\,]-1,1[$,
$$\|f_n-f\|_\infty\geq|f_n(x)-f(x)|=\sum_{k=n+1}^{+\infty}|x|^k=\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$
En particulier, pour $x_m=1-\frac{1}{m}\in D(0,1)$, nous avons
$$\|f-f_n\|_\infty\geq\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{m}\right)}=m\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n+1}\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$
Ainsi on ne peut pas avoir convergence uniforme.