Exercice (Exercice n°31)**.** On considère la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0,1], \quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On définit alors, pour les x tels que la série soit convergente,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que la fonction est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, k-lipschitziennes, et convergeant simplement vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice. On considèrela fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\varphi = |\cdot|$.

1. Montrer que la fonction φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'expression de $\varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ en fonction de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = 1.$$
4. En déduire que le résultat est vrai pour les nombres diadiques :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in [\![0, 2^k]\!], \quad \varphi\left(\frac{p}{2^k}\right) = \frac{p}{2^k}.$$
5. On admet que les nombres diadiques forment un ensemble dense dans $[0,1]$ i.e. pour tout $x \in [0,1]$, il existe une suite de nombres diadiques $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $x_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Montrer alors que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.
6. En déduire le résultat souhaité.

Exercice (Exercice n°32)**.** On considère, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+kx}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction S.
2. Etudier la continuité de la fonction S.
3. Faire de même avec son caractère C^1.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice. On considère $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{x^n}{y^n + n}.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ selon la position du point (x, y) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice. On considère la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Exercice (Exercice n°33)**.**

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de la fonction f en 0 et $+\infty$.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0, 1[$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0, a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur le disque unité ouvert $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Exercice. On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2324.html