Exercice (Exercice n°11)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $E = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur à n. On définit l'application $f : E \longrightarrow E$ par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P'.$$

1. Montrer que l'application f est bijective de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de l'application f,
   (b) en utilisant une matrice de l'application f.
2. Soit $Q \in E$. Déterminer $P \in E$ tel que $f(P) = Q$.
   Indication : pour $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Etudier dans les deux cas suivants le rayon de convergence de la série entière :

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$ quand $n \to +\infty$.
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique non identiquement nulle.

Correction. Dans les deux cas la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En particulier la suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc les rayons de convergence R_1 et R_2 des deux cas vérifient

$$R_1, R_2 \geq 1.$$

1. Comme $l \neq 0$, nous avons, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$,
$$a_n r^n \underset{n\to+\infty}{\sim} l r^n.$$
   Donc si $r > 1$ alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente. Par conséquent
$$R_1 = 1.$$
2. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non identiquement nulle et périodique, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$. Donc la série $\sum a_n 1^n$ est grossièrement divergente. Par conséquent
$$R_2 = 1.$$

Exercice. On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = \frac{arcin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que la fonction f est solution d'une équation différentielle. En déduire le développement en série entière de la fonction f et donner son rayon de convergence.

Correction. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, comme quotient et composé de telles fonctions, et pour $x \in \,]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{arcsin'(x)\sqrt{1-x^2} - arcsin(x)(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1 + xf(x)}{1-x^2}$$

i.e. la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0, \quad f(0) = 0$$

De plus la fonction f est développable en série entière $\sum a_n z^n$ comme quotient de telles fonctions. Or la fonction f est impaire, donc les termes d'indice pair dans son développement en série entière sont nuls. Ainsi on peut noter son développement en série entière $\sum a_n x^{2n+1}$. Puis le développement en série entière de f' est $\sum(2n+1)a_n x^{2n}$. Nous reportons ces deux séries entières dans l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
1 &= (1-x^2)f'(x) - xf(x) \\
&= (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - x\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)a_n x^{2(n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty}2na_{n-1}x^{2n} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((2n+1)a_n - 2na_{n-1})x^{2n}.
\end{aligned}$$

On obtient par unicité des coefficients d'une série entière la relation suivante

$$a_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{2n}{2n+1}a_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2(n-1)}{2n-1}a_{n-2}.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Puis, après calculs,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, par critère de d'Alembert, le rayon de convergence est 1.

Exercice (Exercice n°14)**.** Soient P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 3z = 0$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 2y + 3z = 0\},$$

et D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(2, 2, 1)$

$$D = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les sous-espaces P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = P \oplus D,$$

et déterminer les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur sur P parallèlement à D et de la symétrie par rapport à P parallèlement à D.

Exercice. On considère la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Correction.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :
   (a) Si $x < 0$ alors $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où $\sum f_n(x)$ est grossièrement divergente.
   (b) Si $x \geq 0$ alors $f_n(x)$ est le terme général d'une série alternée tel que $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant. Donc, par critère des séries alternées, $\sum f_n(x)$ est convergente.

   Par conséquent $\Delta = \mathbb{R}_+$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors, par critère des séries alternées,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

   D'où R_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui montre que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus tous les f_n sont continues, donc, par théorème de continuité sous le signe somme, $f = \sum f_n$ est continue.

Exercice. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, k-lipschitziennes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|,$$

et convergeant simplement vers $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Correction. Nous avons par hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, par convergence simple, on obtient que f est k-lipschizienne. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à ε. Soit $x \in [a, b]$, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$, alors, par inégalité triangulaire,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)|.$$

Puis, par k-lipschiziennité,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2k|x - a_i| + |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq 2k\varepsilon + |f_n(a_i) - f(a_i)|.$$

Or pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $f_n(a_i) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a_i)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ (indépendant de x) tel que

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \forall n \geq N, |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq 2k\varepsilon + \varepsilon.$$

Par conséquent

$$\forall n \geq N, \|f_n - f\|_\infty \leq (2k+1)\varepsilon$$

ce qui montre bien que la convergence est uniforme.

Exercice (Exercice n°9)**.** On considère, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1. Déterminer les points critiques de la fonction f.
2. Est-ce que la fonction f possède un extremum global ?
3. Quels sont les extrema locaux de la fonction f ?

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0,1[$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur le disque unité ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Correction.

1. Soit $z \in \overline{D}(0,a)$. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z) - f(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $a \in [0,1[$. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0,a)$.

2. Soit $z \in D(0,1)$, alors, d'après ce qui précède

$$f_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(z)$$

Mais, pour $x \in]-1,1[$,

$$\|f_n - f\|_\infty \geq |f_n(x) - f(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x|^k = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

En particulier, pour $x_m = 1 - \frac{1}{m} \in D(0,1)$, nous avons

$$\|f - f_n\|_\infty \geq \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{m}\right)} = m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi on ne peut pas avoir convergence uniforme.

Exercice. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq \dfrac{1}{4}$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

3. En déduire la valeur de R ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Correction.

1. On souhaite montrer que la suite $\left(a_n \dfrac{1}{4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Pour les premiers termes nous avons

$$a_0 \frac{1}{4^0} = 1, \quad a_1 \frac{1}{4^1} = \frac{3}{4} < 1, \quad a_2 \frac{1}{4^2} = \frac{7}{16} < 1.$$

On montre alors par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$|a_n|\frac{1}{4^n} \leq 1, \quad \text{i.e.} \quad |a_n| \leq 4^n$$

Nous avons l'initialisation d'après ce qui précède. On suppose le résultat vrai aux rangs $n-1$ et $n-2$ pour $n > 3$. Alors

$$|a_n| \leq 3|a_{n-1}| + 2|a_{n-2}| \leq 3 \times 4^{n-1} + \underbrace{2}_{\leq 4} \times 4^{n-2} \leq (3+1) \times 4^{n-1} = 4^n.$$

Le principe de récurrence permet de conclure que la suite $\left(a_n \dfrac{1}{4^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1. Donc

$$R \geq \frac{1}{4}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Alors

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \\
&= a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty}(3a_{n-1} - 2a_{n-2})z^n = a_0 + a_1 z + 3z\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n - 2z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\
&= a_0 + a_1 z + 3z(f(z) - a_0) - 2z^2 f(z) = 1 + 3z f(z) - 2z^2 f(z).
\end{aligned}$$

Donc

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

3. Nous avons donc par décomposition en éléments simples

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2z-1)} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{2z-1},$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{2z-1} = \alpha + \frac{z-1}{2z-1}\beta, \quad \frac{1}{z-1} = \frac{2z-1}{z-1}\alpha + \beta.$$

Donc, en évaluant en $z = 1$ et $z = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = -2.$$

Ainsi

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{2z-1} = -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n,$$

où les deux séries entières sont de rayon de convergence 1 et $\dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$R = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

De plus nous avons montré que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1) z^n.$$

Donc, par unicité d'un développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^{n+1} - 1.$$