Exercice (Exercice n°11)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, et $E = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur à n. On définit l'application $f : E \longrightarrow E$ par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P'.$$

1. Montrer que l'application f est bijective de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de l'application f,
   (b) en utilisant une matrice de l'application f.
2. Soit $Q \in E$. Déterminer $P \in E$ tel que $f(P) = Q$.
   Indication : pour $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Etudier dans les deux cas suivants le rayon de convergence de la série entière :

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$ quand $n \to +\infty$.
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique non identiquement nulle.

Exercice. On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{arcin(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Montrer que la fonction f est solution d'une équation différentielle. En déduire le développement en série entière de la fonction f et donner son rayon de convergence.

Exercice (Exercice n°14)**.** Soient P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 3z = 0$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x - 2y + 3z = 0\},$$

et D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(2, 2, 1)$

$$D = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les sous-espaces P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^3 = P \oplus D,$$

et déterminer les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur sur P parallèlement à D et de la symétrie par rapport à P parallèlement à D.

Exercice. On considère la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition Δ de f.
2. Montrer que f est continue sur Δ.

Exercice. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, k-lipschitziennes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|,$$

et convergeant simplement vers $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice (Exercice n°9)**.** On considère, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1. Déterminer les points critiques de la fonction f.
2. Est-ce que la fonction f possède un extremum global ?
3. Quels sont les extrema locaux de la fonction f ?

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0, 1[$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(z) = (1-z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0, a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur le disque unité ouvert $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Exercice. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

3. En déduire la valeur de R ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2324.html