Exercice (Exercice n°23)**.**

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués). Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice. Montrer qu'il existe une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, non bornée et intégrable sur $[0, +\infty[$:

$$\int_0^\infty f(x)dx < +\infty.$$

Exercice. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}.$$

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière complexe $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

3. En déduire la valeur de R ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice (Exercice n°4)**.**

1. On considère les fonctions $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2x}$ et $h : x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \longmapsto \frac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h.
2. On considère la fonction $f = g \times h$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n-ième d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre n de la fonction f.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice. Soit $p, k \in \mathbb{N}^*$ et on considère la fonction $f_{p,k} : x \in\ ]0, 1] \longmapsto x^p \ln(x)^k$.

1. Montrer que la fonction $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0, 1]$. On note alors $K_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(x)dx$.
2. Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.
3. Exprimer $J_n := \int_0^1 (x \ln(x))^n dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Exercice. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Etudier dans les deux cas suivants le rayon de convergence de la série entière :

1. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$ quand $n \to +\infty$.
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique non identiquement nulle.

Exercice (Exercice n°33)**.**

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$ est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$ puis des équivalents de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Exercice. On considère une fonction $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et intégrable sur $[0,+\infty$.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)\cos(xt)dt = 0.$$
2. En déduire que
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)dt = 0.$$
3. Conclure que
$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{ixt}dt = 0,$$
ce qu'on appelle le théorème (ou lemme) de Riemann-Lebesgue.

Exercice. On considère la fonction f définie par
$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad f(x) = \frac{arcin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
Montrer que la fonction f est solution d'une équation différentielle. En déduire le développement en série entière de la fonction f et donner son rayon de convergence.

Vous pourrez trouver en ligne la correction des exercices proposés sur ma page personnelle :

https ://perso.eleves.ens-rennes.fr/~dcaci409/Kholles2324.html