Théorème de stabilité de Liapounov

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Leçons.

1. 220 Equations différentielles ordinaires, exemples de résolution et d'étude de solutions en dimension 1 et 2
2. 221 Equations différentielles linéaires, systèmes d'équations différentielles linéaires, exemples et applications

Théorème. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $f(0) = 0$ et toutes les valeurs propres de $A = Df(0)$ soient de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable de l'équation $y' = f(y)$.

Démonstration.
Etape 1 : Comportement de la solution $z' = Az, z(0) = x$
Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors l'unique solution de $z' = Az, z(0) = x$ est donnée par

$$z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & e^{tA}x \end{array}$$

Or par hypothèse sur les valeurs propres de A, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall j \in [\![1, r]\!], Re(\lambda_j) < -a$$

De plus il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \left\| e^{tA}x \right\| \leq P(|t|) \sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_i)} \|x\|$$

Donc

$$\|z(t)\| = \left\| e^{tA}x \right\| \leq P(|t|) r e^{-ta} \|x\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi 0 est un point d'équilibre attractif.
Etape 2 : Considérer la forme bilinéaire symétrique définie positive $b(x, y) = \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la première étape

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}, |\langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle| \leq \left\| e^{tA}x \right\| \left\| e^{tA}y \right\| \leq P(|t|)^2 r^2 e^{-2at} \|x\| \|y\| \in L^1([0, +\infty[)$$

On peut donc considérer

$$b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle dt \end{array}$$

Qui est une application bilinéaire symétrique définie positive car le produit scalaire l'est.

<u>Etape 3 : Différentielle de la forme quadratique associée q et $\langle \nabla q(x), Ax \rangle = 2b(x, Ax) = -\|x\|^2$</u>

Soit $x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, alors

$$q(x+h) = q(x) + 2b(x,h) + q(h) \underset{\sqrt{q(h)} \to 0}{=} q(x) + 2b(x,h) + o(\sqrt{q(h)})$$

car, par inégalité de Cauchy-Schwarz, $|q(h)| = |b(h,h)| \leq \sqrt{q(h)}\sqrt{q(h)}$.
D'où, comme $h \longmapsto b(x,h)$ linéaire,

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, dq(x)(h) = 2b(x,h)$$

Ainsi, par définition de b et de la solution z,

$$\langle \nabla q(x), Ax \rangle = dq(x)(Ax) = 2b(x, Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt = \left[\|z(t)\|^2\right]_0^{+\infty} = -\|x\|^2$$

<u>Etape 4 : Avec (y, I) solution et $r(y) = f(y) - Ay$, on a $q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$</u>

Comme f est de classe C^1, par théorème de Cauchy-Lipschitz localement lipschitzien, il existe une unique solution $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de $y' = f(y), y(0) = x$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. On a alors

$$y' = f(y) = Ay + r(y)$$

Donc, par composition,

$$(q(y))' = dq(y)(y') = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$$

<u>Etape 5 : Il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(t)) \leq -\beta q(y)$</u>

On a

$$r(y) = f(y) - f(0) - Df(0)(y)$$

Donc, par différentiabilité avec la norme $\sqrt{q}$, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(r(y)) \leq \varepsilon^2 q(y)$$

D'où, en utilisant l'étape précédente, l'équivalence des normes en dimension finie et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -cq(y) + 2\sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))} \leq -cq(y) + 2\varepsilon q(y) = -\beta q(y)$$

avec $c \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta = c - 2\varepsilon$ et ε tel que $\varepsilon < \frac{c}{2}$.

<u>Etape 7 : $q(x) < \alpha \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, q(y(t)) < \alpha$</u>

On suppose $q(x) < \alpha$ et on suppose par l'absurde qu'il existe $t \in \mathbb{R}_+^* \cap I$ tel que $q(y(t)) = \alpha$. On peut donc considèrer

$$t_0 = inf(t \in \mathbb{R}_+^* \cap I, q(y(t)) = \alpha) \in \mathbb{R}_+^*$$

Dans ce cas $q(y(t_0)) = \alpha \leq \alpha$ et d'après l'étape précédente,

$$q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y(t_0)) < 0$$

Donc $q(y)$ est décroissant sur un voisinage à gauche de t_0, ie il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall t \in]t_0 - \delta, t_0[\subset I, q(y(t)) > q(y(t_0)) = \alpha$$

Or $q(y(0)) = q(x) < \alpha$ et $q(y)$ est coninue, donc par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_1 \in]0, t_0 - \delta]$ tel que $q(y(t_1)) = \alpha$ ce qui contredit la minimalité de t_0.
Par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I, q(y(t)) < \alpha$$

Ce qui montre que la solution est bornée donc globale, en particulier $\mathbb{R}_+ \subset I$.

Etape 7 : $\forall t \in \mathbb{R}_+, q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$

D'où en combinant les étapes 5 et 6, pour $q(x) < \alpha$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$q(y(t))' \leq -\beta q(y(t))$$

Donc

$$(e^{\beta t} q(y))' = e^{\beta t}(q(y)' + \beta q(y)) \leq 0$$

D'où $t \longmapsto e^{\beta t} q(y(t))$ est décroissante, ainsi

$$q(y(t)) = e^{-\beta t} e^{\beta t} q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q^{\beta 0} q(y(0)) = e^{-\beta t} q(x)$$

Etape 8 : Conclusion

Finalement on a

$$q(x) < \alpha \Rightarrow y(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui montre bien par équivalence des normes en dimension finie que 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable de l'équation différentielle. $\square$

Lemme. (Pas le temps) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de valeurs complexes $\lambda_1, ..., \lambda_r$, alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \left\| e^{tA} x \right\| \leq P(|t|) \sum_{j=1}^{k} e^{tRe(\lambda_i)} \|x\|$$

Démonstration.
On note $m_1, ..., m_r$ les multiplités algébriques associés aux $\lambda_1, ..., \lambda_r$, alors

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{ker((A - \lambda_i I_n)^{m_i})}_{=:E_i}$$

Soit $j \in [\![1, r]\!]$, E_j est $A - \lambda_j I_n$-stable et l'endomoprphisme induit par la restriction sur E_j est nilpotent d'indice m_j.
Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x_j \in E_j$, alors

$$e^{tA} x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(A - \lambda_j I_n)} x_j = e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{m_j - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_j I_n)^k x_j$$

Donc, comme $\forall k \in [\![1, m_j - 1]\!]$, $|t|^k \leq (1 + |t|)^{m_j - 1}$,

$$\left\|e^{tA}x_j\right\| \leq e^{tRe(\lambda_j)} \sum_{k=1}^{m_j-1} \frac{|t|^k}{k!} \left\|A - \lambda_j I_n\right\|^k \left\|x_j\right\| \leq e^{tRe(\lambda_j)} C_j (1 + |t|)^{m_j - 1} \left\|x_j\right\|$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, alors il existe $x_1, ..., x_r \in E_1, ..., E_r$ tels que $x = \sum_{j=1}^{r} x_j$, donc

$$\left\|e^{tA}x\right\| \leq \sum_{j=1}^{r} \left\|e^{tA}x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{r} e^{tRe(\lambda_k)} C_j (1+|t|)^{m_j-1} \left\|x_j\right\| \leq \max_{j=1}^{r}(C_j)(1+|t|)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{r} e^{tRe(\lambda_j)}\right) \max_{j=1}^{r} \left\|x_j\right\|$$

Or $\mathbb{C}^n$ est dimension finie donc $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme max, donc il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\left\|e^{tA}x\right\| \leq C(1 + |t|)^{n-r} \sum_{j=1}^{r} e^{tRe(\lambda_j)} \left\|x\right\| = P(|t|) \sum_{j=1}^{r} e^{tRe(\lambda_j)} \left\|x\right\|$$

□