
TD 2 : Calculs de limites

Les questions marquées (*^{AA}) sont à faire en auto-apprentissage.

Exercice 1.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 8}{1 - 6x^2}$;

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sin(x)}{e^x}$;

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + e^x}{1 - e^{-x}} \cos(x)$;

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$;

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x}$;

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$;

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 2.

Calculer les limites :

1. en $\frac{1}{2}$ et $+\infty$ de $f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$;

2. en $+\infty$ de $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1 + \sqrt{x + 1}}$;

3. en 1 de $f(x) = \frac{3}{x^3 - 1} - \frac{2}{x^2 - 1}$;

4. en $+\infty$ de $f(x) = \frac{x \cos x}{x^2 + x \sin x + 3}$;

5. en $+\infty$ de $f(x) = 2 \ln(x + 1) - \ln(x^2 + 1)$.

Exercice 3.

Etudier la limite de f au point x_0 dans les cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ ($x_0 = -1$);
2. $(*^{AA}) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ ($x_0 = 1$);
3. $(*^{AA}) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ ($x_0 = 4$);
4. $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{8x^3 - 1}$ ($x_0 = \frac{1}{2}$);
5. $f(x) = \frac{|x^2 + 3x + 2|}{x + 1}$ ($x_0 = -1$);
6. $f(x) = \frac{x}{x + |x|}$ ($x_0 = 0$);
7. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \ln(1 - 2x)$ ($x_0 = 0$);
8. $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ ($x_0 = 0$);
9. $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$ ($x_0 = 0$);
10. $(*^{AA}) f(x) = \frac{\ln(1 + 2x)}{3x}$ ($x_0 = 0$);
11. $f(x) = \frac{x - \ln x}{(\ln x)^2}$ ($x_0 = 0$);
12. $f(x) = \sin(\pi x) \ln(1 - x)$ ($x_0 = 1$).

Exercice 4.

Etudier les limites éventuelles de la fonction f quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x$
2. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x-1}}$
3. $(*^{AA}) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x + \sqrt{x+1}}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
2. Que conclure sur la limite de f en 0?

Exercice 6.

Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$
5. $(*AA) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5}{5x^3 - x^2 + 2}$
6. $(*AA) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin x}$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(5x)}{\sin x + \sin(5x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{1/x} + 1}$
11. $(*AA) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$

Pour réviser : Faire le QCM-calcul de limites sur la page UMTICE (L1 - Calculs Mathématiques, Maths 1 et Maths 2)

_____ Pour aller plus loin _____

Exercice 7.

Etudier la limite en 0 de $f(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

Exercice 8.

Pour $a \neq 0$, calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x^2 - a^2}$.