Mathématiques de l'ingénieur 2 - Travaux dirigés

Dorian Cacitti-Holland

2023-2024

1 Pivot de Gauss

1.1 Méthodes de remontée et de descente

Exercice 1. Déterminer les solutions des systèmes dont les représentations matricielles sont données par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Correction. Pour le premier on applique la méthode de remontée

$$x_3 = 1,$$

puis

$$x_2 + 2x_3 = 3 \quad \text{i.e.} \quad x_2 = \frac{3-2}{1} = 1,$$

et enfin

$$x_1 = \frac{6 - 2x_2 - 3x_3}{1} = 1.$$

Pour le second on applique la méthode de descente

$$x_1 = 6,$$

puis

$$x_2 = \frac{3 - 2x_1}{1} = -9,$$

et enfin

$$x_3 = \frac{1 - 3x_1 - 2x_2}{1} = 1.$$

1.2 Méthode du pivot de Gauss

Exercice 2. On considère le système dont la représentation matricielle est donnée par

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la solution de ce système.
2. Calculer le nombre exact d'opérations que vous avez effectuées.

Correction.

1. Nous avons le premier coefficient $5 \neq 0$ donc on peut le choisir comme pivot. On effectue ensuite les opérations

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{4}{5} L_1.$$

Nous obtenons donc
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ \frac{63}{5} \end{pmatrix}.$$
On continue avec le pivot $-8 \neq 0$. Nous effectuons l'opération
$$L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{18}{5 \times 8} L_2 = L_3 + \frac{9}{5 \times 4} L_2.$$
Nous obtenons donc
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ \frac{153}{20} \end{pmatrix}.$$
On applique ensuite la méthode de la remontée
$$x_3 = \frac{153}{45} = \frac{17}{5},$$
puis
$$x_2 = \frac{-11 - x_3}{-8} = \frac{55 + 17}{40} = \frac{72}{40} = \frac{9}{5},$$
et enfin
$$x_1 = \frac{12 - 2x_2 - x_3}{5} = \frac{60 - 18 - 17}{25} = 1.$$

2. Pour la première étape de la trigonalisation nous avons effectué :
   - 1 division
   $$\frac{4}{5}.$$
   - 2 multiplication
   $$\frac{4}{5} \times 2, \quad \frac{4}{5} \times 12.$$
   - 6 soustractions (additions)
   $$-6-2 = -8, \quad 2-1 = 1, \quad 2-\frac{4}{5}\times 2 = \frac{18}{5}, \quad 1+\frac{4}{5}\times 1 = \frac{9}{5}, \quad 1-12 = -11, \quad 3+\frac{4}{5}\times 12 = \frac{63}{5}.$$

   Pour la seconde étape de la trigonalisation nous avons effectué :
   - 1 division
   $$\frac{\frac{18}{5}}{-8}.$$
   - 1 multiplication
   $$\frac{18}{5 \times 8} \times (-11).$$
   - 2 soustractions (additions)
   $$\frac{9}{5} + \frac{18}{5 \times 8}, \quad \frac{63}{5} + \frac{18}{5 \times 8} \times (-11).$$

   Pour la méthode de remontée nous avons effectué :
   - 1 multiplication
   $$2 \times x_2.$$
   - 3 soustractions
   $$-11 - x_3, \quad 12 - 2x_2 - x_3.$$

- 3 divisions

$$\frac{\frac{153}{20}}{\frac{9}{4}}, \quad \frac{-11-x_3}{-8}, \quad \frac{12-2x_2-x_2}{5}.$$

Au total nous avons donc 5 divisions, 4 multiplications et 9 soustractions (additions).

Exercice 3. Déterminer la solution du système dont le système matricielle est donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Correction. On effectue les opérations

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1, \quad L_4 \longleftarrow L_4 - 4L_1$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

On remarque que le premier coefficient suivant est nul, on échange donc les lignes 2 et 3

$$L_2 \longleftrightarrow L_3$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

On peut donc maintenant effectuer l'opération suivante

$$L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_2$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On effectue ensuite l'opération

$$L_4 \longleftarrow L_4 - L_3$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la méthode de remontée pour obtenir

$$x_4 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1.$$

1.3 Choix du pivot

Exercice 4. En optimisant le choix du pivot, redéterminer la solution du système dont le système matricielle est donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Correction. On remarque que le premier coefficient n'est pas le plus grand. On effectue donc l'opération

$$L_1 \longleftrightarrow L_4$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations

$$L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{3}{4}L_1, \quad L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{1}{4}L_1$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ \frac{15}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

On remarque que le pivot suivant $\frac{1}{2}$ est le plus grand. Nous n'avons donc pas besoin d'échanger de lignes. On effectue ensuite les opérations

$$L_3 \longleftarrow L_3 - L_2, \quad L_4 \longleftarrow L_4 - L_2$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ \frac{15}{4} \\ -\frac{7}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que le pivot suivant -3 est le plus grand (en valeur absolue). Nous n'avons donc pas besoin d'échanger de lignes. On effectue ensuite l'opération

$$L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{2}{3}L_3$$

pour obenir

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ \frac{15}{4} \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la méthode de remontée pour obtenir comme à l'exercice précédent

$$x_4 = 1, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1.$$

1.4 Méthode de Gauss-Jordan

Exercice 5. Déterminer l'inverse des matrices suivantes par la méthode de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 15 & 19 \end{pmatrix}.$$

Correction. Pour la matrice A nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_2 \longleftarrow -\frac{1}{3}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice B nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 15 & 19 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{5}{2}L_2, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 0L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -4 & \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3, \quad L_2 \longleftarrow L_2 + 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -11 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Factorisation LU

Exercice 6. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une décomposition LU et la déterminer.
2. Calculer le déterminant de la matrice A.
3. Résoudre par la méthode LU le système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. Calculer le coût de cette résolution en terme d'opérations.

Correction.

1. Les sous-matrices diagonales de la matrice A sont

$$(9), \quad \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A$$

et sont toutes inversibles car de déterminants non nuls. Par conséquent la matrice A admet une décomposition LU. Nous avons avec les opérations

$$\left\{ \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{6}{9}L_1 = L_2 - \frac{2}{3}L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{9}L_1 \end{array} \right. , \quad A^{(1)} = E_1 A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

puis

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2, \quad A^{(2)} = E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} =: U.$$

Puis

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{2,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{3,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} & \frac{a_{3,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons par propriété du déterminant

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = 1 \times 9 \times (-1) \times \frac{4}{3} = -12.$$

3. Nous avons

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} Ly & = & b \\ Ux & = & y \end{array} \right. .$$

On cherche d'abord $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $Ly = b$. Effectuons la méthode de descente

$$y_1 = \frac{b_1}{L_{1,1}} = 9, \quad y_2 = \frac{b_2 - L_{2,1}y_1}{L_{2,2}} = -1, \quad y_3 = \frac{b_3 - a_{3,1}y_1 - a_{3,2}y_2}{L_{3,3}} = \frac{2}{3}.$$

Donc

$$y = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Puis on cherche $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $Ux = y$. Effectuons la méthode de remontée

$$x_3 = \frac{y_3}{U_{3,3}} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{y_2 - U_{2,3}x_3}{U_{2,2}} = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{y_1 - U_{1,2}y_2 - U_{1,3}y_3}{U_{1,1}} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est la solution de $Ax = LUx = Ly = b$.

4. Pour la première étape de trigonalisation nous avons effectué :

- 2 divisions
$$\frac{6}{9}, \quad \frac{1}{9}.$$
- 4 multiplications
$$\frac{6}{9} \times 6, \quad \frac{6}{9} \times 3, \quad \frac{1}{9} \times 6, \quad \frac{1}{9} \times 3.$$
- 3 soustractions
$$3 - \frac{6}{9} \times 6, \quad 1 - \frac{6}{9} \times 3, \quad 1 - \frac{1}{9} \times 3.$$

Pour la seconde étape de trigonalisation nous avons effectué :

- 1 division
$$\frac{-\frac{2}{3}}{-1}.$$
- 1 multiplication
$$\frac{-\frac{2}{3}}{-1} \times (-1).$$
- 1 soustraction (addition)
$$\frac{2}{3} - \frac{-\frac{2}{3}}{-1} \times (-1).$$

Pour la méthode de descente nous avons effectué :

- 0 division car les coefficients diagonaux de L sont égaux à 1.
- 3 multiplications
$$\frac{2}{3} \times y_1, \quad \frac{1}{9} \times y_1, \quad \frac{2}{3} \times y_2.$$
- 3 soustractions
$$y_2 - \frac{2}{3}y_1, \quad y_3 - \frac{1}{9} \times y_1 - \frac{2}{3} \times y_2.$$

Pour la méthode de remontée nous avons effectué :

- 3 multiplications
$$-1 \times x_3, \quad 6 \times x_2, \quad 3 \times x_3.$$
- 3 soustractions
$$b_2 - 1 \times x_3, \quad b_1 - 6 \times x_2 - 3 \times x_3.$$
- 3 divisions
$$\frac{b_3}{\frac{4}{3}}, \quad \frac{b_2 - 1 \times x_3}{-1}, \quad \frac{b_1 - 6 \times x_2 - 3 \times x_3}{9}.$$

Au total nous avons 6 divisions, 11 multiplications et 10 soustractions.

Exercice 7. Déterminer les décompositions LU des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction. Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

où l'on a reconnu une matrice tridiagonale. Nous pouvons alors obtenir la décomposition de Cholesky de manière classique par la trigonalisation de l'algorithme du pivot de Gauss mais également par la propriété des matrices diagonales en considérant les déterminants $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ des matrices extraites et la formule associée aux matrices L et U.

Exercice 8. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par :

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = n \\ -1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que A admet une décomposition LU.
2. Effectuer la décomposition LU de A pour $n \in \{2, 3, 4\}$.
3. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, les matrices $L = (\ell_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ de la décomposition LU de A sont données par

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \quad \ell_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq n \\ 2^{i-1} & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Correction. Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (-1) & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pour $k \in \{1, ..., n-1\}$ nous avons

$$\det(\Delta_k) = \begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (-1) & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Puis pour $k=n$ nous avons en développant par rapport à la première ligne

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & & (0) & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (-1) & & & 1 \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (-1) & & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & & (0) & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (-1) & & & 1 \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+1}.$$

Donc nous avons par itérations successives

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}+\underbrace{(-1)^4}_{=(-1)^0}+\underbrace{(-1)^5}_{=(-1)^1}+...+\underbrace{(-1)^n}_{=(-1)^{n-4}}+\underbrace{(-1)^{n+1}}_{=(-1)^{n-3}}=2+\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k=2+\frac{1-(-1)^{n-2}}{2}.$$

Donc

$$\det(A)=2+\frac{1-(-1)^n}{2}\neq 0.$$

2. Pour $n=2$ nous avons

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_2 \longleftarrow L_2-(-1)L_1=L_2+L_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n=3$ nous avons

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_2 \longleftarrow L_2-(-1)L_1=L_2+L_1,\quad L_3 \longleftarrow L_3-(-1)L_1=L_3+L_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\downarrow L_3 \longleftarrow L_3-(-1)L_2=L_3+L_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n=4$ nous avons de même

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie que nous avons $A=LU$. Dans ce cas nous pouvons conclure que L et U sont bien les matrices de la décomposition de A grâce à leur unicité. Soit $i,j\in\{1,...,n\}$.

   - Pour un terme diagonale pas en dernière colonne $i=j\neq n$ nous avons

$$(LU)_{jj}=\sum_{k=1}^{n}\ell_{jk}u_{kj}=\sum_{k=1}^{j-1}\ell_{jk}\underbrace{u_{kj}}_{=0}+\underbrace{\ell_{jj}}_{=1}\underbrace{u_{jj}}_{=1}+\sum_{k=j+1}^{n}\ell_{kj}\underbrace{u_{kj}}_{=0}=1=A_{jj}.$$

- Pour un terme de la dernière colonne $j = n$ nous avons

$$(LU)_{in} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{\ell_{ik}}_{=-1} \underbrace{u_{kn}}_{=2^{k-1}} + \underbrace{\ell_{ii}}_{=1} \underbrace{u_{in}}_{=2^{i-1}} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{\ell_{ik}}_{=0} u_{kn} = -\sum_{k=0}^{i-2} 2^k + 2^{i-1} = -\frac{1-2^{i-1}}{1-2} + 2^{i-1} = 1 = A_{in}.$$

- Pour un terme en dessous de la diagonale $i > j$ nous avons

$$(LU)_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \underbrace{u_{kj}}_{=0 \text{ car } j\neq i,n} + \underbrace{\ell_{ij}}_{=-1} \underbrace{u_{jj}}_{=1} + \sum_{k=j+1}^{n} \ell_{ik} \underbrace{u_{kj}}_{=0} = -1 = A_{ij}.$$

- Pour un terme au dessus de la diagonale pas en dernière colonne $i < j \neq n$ nous avons

$$(LU)_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \underbrace{u_{kj}}_{=0 \text{ car } j\neq n, k\neq j} + \underbrace{\ell_{ij}}_{=0} \underbrace{u_{jj}}_{1} + \sum_{k=j+1}^{n} \ell_{ik} \underbrace{u_{kj}}_{=0} = 0 = A_{ij}.$$

Par conséquent nous avons bien montré $A = LU$ ce qui conclut.

3 Factorisation de Cholesky

Exercice 9. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A admet une décomposition de Cholesky.
2. La déterminer.
3. Résoudre en utilisant la méthode de Cholesky le système $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. La matrice A est symétrique et

$$\chi_A = (X-2)(X-1) - 1 = X^2 - 3X + 1$$

de discriminant

$$\Delta = 9 - 4 = 5,$$

donc les valeurs propres de la mùatrice A sont

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Donc la matrice A est symétrique définie positive donc admet une décomposition de Cholesky. Autrement dit les déterminants des matrices extraites sont strictement positifs :

$$\det((2)) = 2 > 0, \quad \det(A) = 1 > 0.$$

2. On considère une matrice B triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs telle que

$$A = BB^t.$$

Autrement dit on peut écrire

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A = BB^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi
$$a = \sqrt{2}, \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c = \sqrt{1-b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Autrement dit
$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. On commence par résoudre $By = b$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^2$ par la méthode de descente :
$$y_1 = \frac{b_1}{B_{1,1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = \frac{b_2 - B_{2,1}y_1}{B_{2,2}} = \frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Puis on résout $B^t x = y$ par la méthode de descente
$$x_2 = \frac{y_2}{B_{2,2}} = 1, \quad x_1 = \frac{y_1 - B_{2,1}x_2}{B_{1,1}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

4. Pour la décomposition de Cholesky nous avons effectué :
   - 1 multiplication
   $$b^2.$$
   - 1 soustraction
   $$1 - b^2.$$
   - 2 racines carrées
   $$\sqrt{2}, \quad \sqrt{1-b^2}.$$

   Pour la méthode de descente nous avons effectué :
   - 1 multiplication
   $$B_{2,1}y_1.$$
   - 1 soustraction
   $$b_2 - B_{2,1}y_1.$$
   - 2 divisions
   $$\frac{b_1}{B_{1,1}}, \quad \frac{b_1 - B_{2,1}y_1}{B_{2,2}}.$$

   Pour la méthode de remontée nous avons effectué :
   - 0 multiplication car $x_2 = 1$.
   - 1 soustraction
   $$y_1 - B_{2,1}x_1.$$
   - 2 divisions
   $$\frac{y_2}{B_{2,2}}, \quad \frac{y_1 - B_{2,1}}{B_{1,1}}.$$

   Au total nous 2 multiplications, 3 soustraction, 4 divisions et 2 racines carrées.

Exercice 10. Déterminer les décompositions de Cholesky des matrices suivantes.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction. Nous avons

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix},$$

et

$$C=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&\sqrt{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&\sqrt{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

parce que l'on remarque qu'il s'agit de la matrice, en notant $A_2=B_2B_2^t$ les matrices de l'exercice 9,

$$C=\begin{pmatrix}A_2&0_2\\0_2&A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_2B_2^t&0_2\\0_2&B_2B_2^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_2&0_2\\0_2&B_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2^t&0_2\\0_2&B_2^t\end{pmatrix}.$$

4 Intégration numérique

Exercice 11. Pour une intégration numérique par la méthode de quadrature, on choisit de mettre les noeuds $c_1=\frac{1}{4}, c_2=\frac{1}{2}$ et $c_3=\frac{3}{4}$ avec des poids b_1, b_2 et b_3. On souhaite que la méthode soit d'ordre 3.

1. Trouver les poids b_i où $i\in\{1,2,3\}$.
2. Donner, donc les expressions approchées par cette méthode, des intégrales :

$$\int_0^1 g(x)dx, \quad \int_a^b f(x)dx.$$

3. Cette méthode est-elle d'ordre 4 ? Justifier votre réponse.

Correction.

1. Pour avoir une méthode d'ordre 3 il faut et il suffit que

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1\\ b_1c_1 & + & b_2c_2 & + & b_3c_3 & = & \frac{1}{2}\\ b_1c_1^2 & + & b_2c_2^2 & + & b_3c_3^2 & = & \frac{1}{3}\end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1\\ b_1 & + & 2b_2 & + & 3b_3 & = & 2\\ 3b_1 & + & 12b_2 & + & 27b_3 & = & 16\end{array}\right.$$

i.e., par les opérations $L_2\longleftarrow L_2-L_1, L_3\longleftarrow 3L_1$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1\\ & & b_2 & + & 2b_3 & = & 1\\ & & 9b_2 & + & 24b_3 & = & 13\end{array}\right.$$

i.e., par les opérations $L_3\longleftarrow L_3-9L_2$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1\\ & & b_2 & + & 2b_3 & = & 1\\ & & & & 6b_3 & = & 4\end{array}\right.$$

i.e., par méthode de remontée,

$$b_3=\frac{2}{3},\quad b_2=-\frac{1}{3},\quad b_1=\frac{2}{3}.$$

2. Nous avons alors

$$\int_0^1 g(x)dx \simeq b_1 g(c_1) + b_2 g(c_2) + b_3 g(c_3) = \frac{2}{3} g\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} g\left(\frac{3}{4}\right).$$

Puis en considérant une subdivision $a = x_0 < ... < x_N = b$ de $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \left(2f\left(x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{4}\right) - f\left(x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + 2f\left(x_i + \frac{3(x_{i+1} - x_i)}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \left(2f\left(\frac{3}{4}x_i + \frac{1}{4}x_{i+1}\right) - f\left(\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}\right) + 2f\left(\frac{1}{4}x_i + \frac{3}{4}x_{i+1}\right)\right).$$

3. Nous avons

$$b_1 c_1^3 + b_2 c_2^3 + b_3 c_3^3 = \frac{1}{4}.$$

Donc la méthode de quadrature est d'ordre 4. Nous pouvons également le justifier en disant qu'il s'agit d'une méthode symétrique

$$b_1 = b_3, \quad c_1 + c_3 = 1.$$

Exercice 12. Pour une intégration par des formules de quadrature, on considère les noeuds suivants :

- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.
- $(c_1, c_2, c_3, c_4) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$.

1. Déterminer pour chaque cas les poids $(b_1, b_2, b_3, b_4), (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ des noeuds.
2. Déterminer l'ordre de ces formules de quadrature.

Correction.

1. • Nous avons par résolution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & + & b_4 & = & 1 \\ b_1c_1 & + & b_2c_2 & + & b_3c_3 & + & b_4c_4 & = & \frac{1}{2} \\ b_1c_1^2 & + & b_2c_2^2 & + & b_3c_3^2 & + & b_4c_4^2 & = & \frac{1}{3} \\ b_1c_1^3 & + & b_2c_2^3 & + & b_3c_3^3 & + & b_4c_4^3 & = & \frac{1}{4} \end{array}\right. ,$$

$$b_1 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{4}, \quad b_4 = \frac{1}{6}.$$

• Nous avons par résolution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & + & b_4 & + & b_5 & = & 1 \\ b_1c_1 & + & b_2c_2 & + & b_3c_3 & + & b_4c_4 & + & b_5c_5 & = & \frac{1}{2} \\ b_1c_1^2 & + & b_2c_2^2 & + & b_3c_3^2 & + & b_4c_4^2 & + & b_5c_5^2 & = & \frac{1}{3} \\ b_1c_1^3 & + & b_2c_2^3 & + & b_3c_3^3 & + & b_4c_4^3 & + & b_5c_5^3 & = & \frac{1}{4} \\ b_1c_1^4 & + & b_2c_2^4 & + & b_3c_3^4 & + & b_4c_4^4 & + & b_5c_5^4 & = & \frac{1}{5} \end{array}\right. ,$$

$$b_1 = \frac{7}{90}, \quad b_2 = \frac{16}{45}, \quad b_3 = \frac{2}{15}, \quad b_4 = \frac{16}{45}, \quad b_5 = \frac{7}{90}.$$

Exercice 13. Déterminer c_2, b_1, b_2 dans la formule de quadrature suivante afin que son ordre maximal.

$$\int_0^1 g(t)dt \simeq b_1 g(0) + b_2 g(c_2)$$

Correction. On suppose que la formule de quadrature soit d'ordre 3. Alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1+b_2 & = & 1 \\ b_2c_2 & = & \frac{1}{2} \\ b_2c_2^2 & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

i.e., par l'opération $L_3 \longleftarrow \frac{L_3}{L_2}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_1+b_2 & = & 1 \\ b_2c_2 & = & \frac{1}{2} \\ c_2 & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

i.e.

$$c_2 = \frac{2}{3}, \quad b_2 = \frac{3}{4}, \quad b_1 = \frac{1}{4}.$$

Puis nous avons

$$b_1c_1^3 + b_2c_2^3 = b_2c_2^3 \neq \frac{1}{4}.$$

Donc la formule de quadrature n'est pas d'ordre 4 et l'ordre maximal est donc 3.

Exercice 14. Montrer que si les noeuds d'une formule de quadrature satisfont $c_i = 1 - c_{s+1-i}, \forall i \in \{1, ..., s\}$, et si la formule à un ordre $p \geq s$, alors on a nécessairement $b_i = b_{s+1-i}$, c'est-à-dire qu'elle est symétrique.

Correction.

Lemme. Les c_i sont distincts, donc, pour tout $i \in \{1, ..., s\}$, nous avons

$$b_i = \int_0^1 \ell_i(x)dx, \quad \ell_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{s} \frac{x-c_j}{c_i-c_j} \in \mathbb{R}_{s-1}[x].$$

Avec ce lemme nous avons

$$\begin{aligned} b_{s+1-i} &= \int_0^1 \ell_{s+1-i}(x)dx \\ &= \int_0^1 \prod_{j=1, j\neq s+1-i}^{s} \frac{x-c_j}{c_{s+1-i}-c_j}dx \\ &= \int_0^1 \prod_{k=1, k\neq i}^{s} \frac{x-c_{s+1-k}}{c_{s+1-i}-c_{s+1-k}}dx \\ &= \int_0^1 \prod_{k=1, k\neq i}^{s} \frac{x-1+c_k}{c_{s+1-i}-1+c_k}dx \\ &= \int_0^1 \prod_{k=1, k\neq i}^{s} \frac{x-1+c_k}{-c_i+c_k}dx \\ &= \int_0^1 \prod_{k=1, k\neq i}^{s} \frac{1-x-c_k}{c_i-c_k}dx \\ &= \int_0^1 \prod_{k=1, k\neq i}^{s} \frac{y-c_k}{c_i-c_k}dx \\ &= b_i. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer le lemme. Soit g une fonction polynomiale de degré au plus $s-1$. Alors la formule est exacte pour g

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=1}^{s} b_i g(c_i).$$

De plus la fonction g coïncide avec son polynôme interpolateur de Lagrange

$$g(x) = \sum_{i=1}^{s} g(c_i)\ell_i(x).$$

Ainsi

$$\int_0^1 g(x)dx = \sum_{i=1}^{s} \left(\int_0^1 \ell_i(x)dx \right) g(c_i).$$

Donc $\int_0^1 \ell_1(x)dx, ..., \int_0^1 \ell_s(x)dx$ peuvent être des poids associés aux noeuds $c_1, ..., c_s$ pour avoir une formule d'ordre s. Or l'ordre de la formule est d'ordre $p \geq s$ donc les deux s-uplets $(b_1, ..., b_s)$ et $(\int_0^1 \ell_1(x)dx, ..., \int_0^1 \ell_s(x)dx)$ sont tous deux solutions du même système linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ c_1 & \dots & c_s \\ \vdots & & \vdots \\ c_1^{s-1} & \dots & c_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix}.$$

Donc, comme les $c_1, ..., c_s$ sont distincts, il y a unicité de la solution

$$\forall i \in \{1, ..., s\}, \quad b_i = \int_0^1 \ell_i(x)dx.$$

5 Méthodes d'Euler et méthode de Runge-Kutta

Exercice 15. Trouver une méthode numérique dans l'esprit de celle de Runge, mais basée sur la méthode des trapèzes.

Correction. On considère une équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) & = & f(x, y(x)) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases},$$

et une subdivision $0 = x_0 < ... < x_N = \overline{x}$ de $[0, \overline{x}]$ de pas constant $h_i = x_{i+1} - x_i = h = \dfrac{\overline{x}}{N}$. Donc par l'équation différentielle $y'(x) = f(x, y(x))$ et le changement de variable $x = x_{n-1} + ht, dx = hdt$ nous avons

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y(x))dx = y(x_{n-1}) + h \int_0^1 f(x_{n-1} + ht, y(x_{n-1} + ht))dt.$$

Puis on approxime l'intégrale par la méthode des trapèzes

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &\simeq y(x_n) + h \left(\frac{1}{2} f(x_n, y(x_n)) + \frac{1}{2} f(x_n + h, y(x_n + h)) \right) \\ &= y(x_n) + \frac{h}{2} (f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))). \end{aligned}$$

On approxime ensuite $y(x_{n+1})$ de droite par la méthode d'Euler

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + \frac{h}{2} \Big(f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))) \Big).$$

Nous obtenons la méthode numérique basée sur la méthode des trapèzes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \Big(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)) \Big).$$

Exercice 16. Ecrire l'équation différentielle

$$y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

sous forme résolue du premier ordre. Calculer la solution exacte et la solution numérique avec la méthode de Runge sur $[0, 1]$, avec $h = \dfrac{1}{2}$.

Correction. On considère la fonction $z = y'$. Alors z est solution de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z'(x) & = & -z(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ z(0) & = & 1 \end{array} \right. .$$

La solution exacte de cette équation différentielle est donnée par

$$z(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$y(x) = \int_0^x z(t)dt + 1 = -e^{-x} + 1 + 1 = 2 - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Puis pour la méthode de Runge sur $[0, 1]$ avec $h = \frac{1}{2}$, on considère une subdivision régulière $0 = x_0 < \dots x_N = 1$ de $[0, 1]$ de pas h. Nous avons ici $f(x, z) = -z$. Donc

$$z_{n+1} = z_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}f(x_n, z_n)\right) = z_n - h\left(z_n - \frac{h}{2}z_n\right) = \frac{5}{8}z_n.$$

Puis pour y nous avons $y'(x) = f(x, y(x)) = z(x)$. Donc encore avec la méthode de Runge

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) = y_n + hz\left(x_n + \frac{h}{2}\right),$$

où l'on approxime $z\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$ par la méthode de Runge comme précédemment avec $\frac{h}{2}$ à la place de h

$$z\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \simeq z_n - \frac{h}{2}\left(z_n - \frac{h}{4}z_n\right) = \frac{25}{32}z_n.$$

Donc

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{25}{32}z_n = y_n + \frac{25}{64}z_n.$$

De plus comme $h = \frac{1}{2}$ ici, nous avons seulement trois points $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$ et

$$z_0 = 1, z_1 = \frac{5}{8}, z_2 = \frac{25}{64}, \quad y_0 = 1, y_1 = 1 + \frac{25}{64}\frac{5}{8} = \frac{637}{512}, y_2 = \frac{637}{512} + \frac{25}{64}\frac{25}{64} = \frac{5721}{4096}$$

6 Séries de Fourier

Exercice 17. Soit f la fonction de période 2π, valant 1 si $0 \le x < \pi$ et 0 si $\pi \le x < 2\pi$.

1. Ecrire la série de Fourier de f. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier.

Correction.

1. Nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \underbrace{f(t)}_{=0} e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(t)}_{=1} e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikt}dt.$$

Donc si $k = 0$ alors

$$c_0(f) = \frac{1}{2},$$

et si $k \neq 0$ alors

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-ik\pi} - 1}{-ik} = i\frac{(-1)^k - 1}{2\pi k} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -i\frac{1}{\pi k} & \text{si } k \text{ impair} \end{array} \right. .$$

2. La fonction f est de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique. Donc, d'après le théorème de Dirichlet, nous avons la convergence de la série de Fourier et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{\lim_{x^+} f + \lim_{x^-} f}{2}.$$

Autrement dit ici pour tout $x \in [0, 2\pi[$:

- Si $x = 0$ alors
$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{2},$$
ce qui est bien vrai car
$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k} = 0.$$
- Si $x \in]0, \pi[$ alors
$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = 1.$$
- Si $x = \pi$ alors
$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi}}{k} = \frac{1}{2},$$
i.e.
$$\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{2},$$
- Si $x \in]\pi, 2\pi[$ alors
$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = 0.$$

Exercice 18. Soit f la fonction paire de période 2π, égale à $f(x) = (\pi - x)^2$ pour $0 \leq x \leq \pi$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Montrer que la série de Fourier de f est convergente de somme $f(x)$. En déduire
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
3. Par intégrations successives, montrer l'égalité
$$\forall x \in [0, \pi], \quad 4\pi^3 x + (\pi - x)^4 - \pi^4 = 2\pi^2 x^2 + 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(nx)}{n^4}.$$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Correction.

1. Nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{f(-s)}_{=f(s)}e^{iks}ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)(e^{-ikt}+e^{ikt})dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{(\pi-t)^2}\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} s^2\underbrace{\cos(k(\pi-s))}_{=(-1)^k\cos(ks)}ds \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi}\int_{0}^{\pi} s^2\cos(ks)ds.
\end{aligned}$$

Donc si $k=0$ alors

$$c_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi s^2 ds = \frac{\pi^2}{3}.$$

Et si $k \neq 0$ alors, par intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi s^2\cos(ks)ds &= \left[s^2\frac{\sin(ks)}{k}\right]_0^\pi - \frac{2}{k}\int_0^\pi s\sin(ks)ds \\
&= 0-0-\frac{2}{k}\left(\left[s\frac{-\cos(ks)}{k}\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos(ks)ds\right) \\
&= -\frac{2}{k}\left(-\frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + 0 + \frac{1}{k}\left[\frac{\sin(ks)}{k}\right]_0^\pi\right) \\
&= -\frac{2}{k}\left(-\frac{\pi(-1)^k}{k} + 0\right) \\
&= \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}.
\end{aligned}$$

Donc si $k \neq 0$ alors

$$c_k(f) = \frac{2}{k^2}.$$

2. Nous avons

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)e^{ikx}| = 2\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{3} < +\infty.$$

Donc, par convergence absolue, nous avons la convergence de la série de Fourier de f en tout $x \in \mathbb{R}$. Or la fonction f est continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique, donc par théorème de Dirichlet nous avons la convergence normale de la série de Fourier vers f

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

En particulier en $x=0$ nous avons

$$\pi^2 = f(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{+\infty}\frac{2}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Soit $x \in [0, \pi]$. Alors par convergence normale nous avons

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \int_0^x e^{ikt}dt.$$

Avec d'un côté

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (\pi - t)^2 dt = \left[-\frac{(\pi - t)^3}{3} \right]_0^x = \frac{\pi^3}{3} - \frac{(\pi - x)^3}{3}.$$

Et d'un autre côté pour tout $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$

$$\int_0^x e^{ikt}dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^x = \frac{e^{ikx} - 1}{ik}.$$

Donc en combinant ces deux calculs

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^3}{3} - \frac{(\pi - x)^3}{3} &= \frac{\pi^2}{3}x + \frac{2}{i} \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} \frac{e^{ikx} - 1}{k^3} \\
&= \frac{\pi^2}{3}x + \frac{2}{i} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx} - 1}{k^3} - \frac{2}{i} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-ikx} - 1}{k^3} \\
&= \frac{\pi^2}{3}x + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3},
\end{aligned}$$

i.e.

$$\pi^3 - (\pi - x)^3 = \pi^2 x + 12 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}.$$

Or la série de fonctions $\sum \frac{\sin(kx)}{k^3}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ donc par intégration nous avons

$$\int_0^x (\pi^3 - (\pi - t)^3)dt = \pi^2 \int_0^x tdt + 12 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \int_0^x \sin(kt)dt.$$

Avec d'un côté

$$\int_0^x (\pi^3 - (\pi - t))^3)dt = \pi^3 x - \left[-\frac{(\pi - t)^4}{4} \right]_0^x = \pi^3 x + \frac{(\pi - x)^4}{4} - \frac{\pi^4}{4}.$$

Et d'un autre côté

$$\int_0^x tdt = \frac{x^2}{2},$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^x \sin(kt)dt = -\frac{\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k}.$$

Donc en combinant ces deux calculs

$$\pi^3 x + \frac{(\pi - x)^4}{4} - \frac{\pi^4}{4} = \frac{\pi^2 x^2}{2} + 12 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx) - 1}{k^4},$$

i.e.

$$4\pi^3 x + (\pi - x)^4 - \pi^4 = 2\pi^2 x^2 + 48 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx) - 1}{k^4}.$$

Nous en déduisons pour $x = \pi$

$$4\pi^4 - \pi^4 = 2\pi^4 + 48 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^4},$$

i.e.

$$\pi^4 = 48\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^4} = 48\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Ensuite nous avons

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^4} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}\frac{16}{15} = \frac{\pi^4}{90}$$

7 Transformée de Fourier

Exercice 19. La fonction porte Π est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte.
2. En déduire la transformée de Fourier des fonctions impulsions $\Pi_T, T \in \mathbb{R}_+^*$ définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Pi_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & \text{si } -\dfrac{T}{2} \leq t \leq \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Que se passe-t-il lorsque l'on fait tendre T vers 0 ?
3. Utiliser le propriétés de la transformée de Fourier pour trouver les transformées des fonctions

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right), \quad g(t) = t\Pi(t), \quad h(t) = t^2\Pi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Correction.

1. Nous avons pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(\Pi)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\xi x)\Pi(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(-i\xi x)dx$$

   Donc si $\xi = 0$ alors

$$\mathcal{F}(\Pi)(0) = 1$$

   et si $x \neq 0$

$$\mathcal{F}(\Pi)(\xi) = \left[\frac{\exp(-i\xi x)}{-i\xi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{i\xi}\left(\exp\left(-i\frac{\xi}{2}\right) - \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right)\right) = \frac{2}{\xi}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

   On remarque que nous avons

$$\mathcal{F}(\Pi)(\xi) \underset{\xi\to 0}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\Pi)(0).$$

2. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Alors
$$\Pi_T(x) = \frac{1}{T}\pi\left(\frac{x}{T}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, si $\xi \neq 0$
$$\mathcal{F}(\Pi_T)(\xi) = \mathcal{F}(\Pi)\,(T\xi) = \frac{2}{T\xi}\sin\left(\frac{T\xi}{2}\right).$$
et si $\xi = 0$
$$\mathcal{F}(\Pi_T)(0) = \mathcal{F}(\Pi)(0) = 1.$$
Nous en déduisons la convergence simple
$$\mathcal{F}(\Pi_T)(\xi) \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Alors
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right)(\xi) = 2\mathcal{F}(\Pi(t-1))(2\xi) = 2\exp(-i\xi)\mathcal{F}(\Pi)(2\xi) = 2\exp(-i\xi)\frac{\sin(\xi)}{\xi},$$
où l'on notons $\dfrac{\sin(0)}{0} = 1$. Puis
$$\mathcal{F}(g)(\xi) = \mathcal{F}(t\Pi(t))(\xi) = i\frac{\partial\mathcal{F}(\Pi)}{\partial\xi}(\xi) = i\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\frac{\xi}{2} - \sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\frac{\xi^2}{4}} = i\frac{\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\xi - 2\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\xi^2}.$$
Et enfin
$$\mathcal{F}(h)(\xi) = \mathcal{F}(t^2\Pi(t))(\xi) = -\frac{\partial^2\mathcal{F}(\Pi)}{\partial\xi^2}(\xi) = i\frac{\partial\mathcal{F}(g)}{\partial\xi}(\xi).$$

Exercice 20.

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les transformées de Fourier de
$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad k(x) = \frac{1}{1+(x-a)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Indication : comparer h avec la dérivée de g.

Correction.

1. Nous avons pour tout $\xi \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\xi x)f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\xi x - |x|)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \exp(-i\xi x + x)dx + \int_{0}^{+\infty} \exp(-i\xi x - x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \exp((1-i\xi)x)dx + \int_{0}^{+\infty} \exp((-1-i\xi)x)dx \\
&= \frac{1}{1-i\xi} - 0 + 0 - \frac{1}{-1-i\xi} \\
&= \frac{-1-i\xi-1+i\xi}{(1-i\xi)(-1-i\xi)} \\
&= \frac{-2}{(1-i\xi)(-1-i\xi)} \\
&= \frac{2}{(1-i\xi)(1+i\xi)} \\
&= \frac{2}{1+\xi^2}.
\end{aligned}$$

2. Nous avons $\mathcal{F}(f)$ intégrable et
$$\mathcal{F}(f) = 2g.$$
Donc nous avons l'inversion de Fourier : pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mathcal{F}(f)(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(t)dt.$$
Donc
$$\mathcal{F}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g(t)dt = \pi f(-x) = \pi e^{-|x|}.$$
Puis remarquons que $h = \frac{1}{2}g'$. Donc
$$\mathcal{F}(h)(x) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(g')(x) = \frac{1}{2}ix\mathcal{F}(g)(x) = \frac{i\pi}{2}xe^{-|x|}.$$
Puis
$$\mathcal{F}(h)(x) = \mathcal{F}(g(t-a))(x) = \exp(-iax)\mathcal{F}(g)(x) = \pi e^{-|x|-iax}.$$

8 Transformée de Fourier discrète

Exercice 21. Calculer à la main la transformée de Fourier discrète de la suite $(0, 1, 2, 3, 0, -3, -2, -1)$.

Correction. Nous avons d'après l'énoncé
$$N = 8, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 3, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = -3, \quad y_6 = -2, \quad y_7 = -1.$$
Donc la transformée de Fourier discrète est donnée par
$$z_k = \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{7} y_j \omega^{-kj}, \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$
Donc comme les y_j sont particuliers ici nous avons
$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{8}\left(\omega^{-k} + 2\omega^{-2k} + 3\omega^{-3k} - 3\omega^{-5k} - 2\omega^{-6k} - \omega^{-7k}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\omega^{-k} + 2\omega^{-2k} + 3\omega^{-3k} - 3\omega^{3k} - 2\omega^{2k} - \omega^{k}\right) \quad \text{car} \quad \omega^{8k} = 1\\
&= -\frac{1}{8}\left(\omega^k - \overline{\omega^k} + 2(\omega^{2k} - \overline{\omega^{2k}}) + 3(\omega^{3k} - \overline{\omega^{3k}})\right)\\
&= -\frac{i}{4}\left(\frac{\omega^k - \overline{\omega^k}}{2i} + 2\frac{\omega^{2k} - \overline{\omega^{2k}}}{2i} + 3\frac{\omega^{3k} - \overline{\omega^{3k}}}{2i}\right)\\
&= -\frac{i}{4}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{3k\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$
Ainsi
$$z_0 = 0,$$
$$z_1 = -\frac{i}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -i\frac{1+\sqrt{2}}{2},$$
$$z_2 = -\frac{i}{4}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\pi) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -\frac{i}{4}(1 + 0 - 3) = \frac{i}{2},$$
$$z_3 = -\frac{i}{4}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = i\frac{1-\sqrt{2}}{2},$$
$$z_4 = -\frac{i}{4}\left(\sin(\pi) + 2\sin(2\pi) + 3\sin(3\pi)\right) = -\frac{i}{4}(0 + 0 + 0) = 0,$$

$$z_5 = -\frac{i}{4}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = -\frac{i}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = i\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

$$z_6 = -\frac{i}{4}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sin(3\pi) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{i}{4}(-1+0+3) = -\frac{i}{2},$$

$$z_7 = -\frac{i}{4}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{i}{4}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = i\frac{1+1\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 22. Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in]-\pi,\pi], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{\pi} & \text{si} \quad |x| < \pi \\ 0 & \text{si} \quad x = \pi \end{cases}$$

1. Montrer que les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ sont :

$$\widehat{f}(0) = 0, \quad \widehat{f}(k) = \frac{4(-1)^{k+1}}{i\pi k}, k \neq 0.$$

2. Calculer la transformée de Fourier discrète pour $y_j, j \in \{0,...,N-1\}$ avec $y_j = f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$.
3. Vérifier le résultat obtenu dans l'exercice précédent pour $N = 8$.
4. Estimer la différence $|z_k - \widehat{f}(k)|$.

Correction.

1. Nous avons

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} tdt = 0.$$

Et pour $k \in \mathbb{Z}^*$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= \frac{2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}dt \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left(\left[t\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikt}}{ik}dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left(-\pi\frac{e^{-ik\pi}}{ik} - \pi\frac{e^{ik\pi}}{ik} + \frac{1}{ik}\left[\frac{e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{ik}(e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}) + \frac{1}{k^2}(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi})\right) \\
&= -\frac{4}{i\pi k}\cos(k\pi) + 0 \\
&= \frac{4(-1)^{k+1}}{i\pi k}.
\end{aligned}$$

2. Nous avons pour tout $k \in \{0,...,N-1\}$

$$z_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j\omega^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + 0.$$

Supposons $N = 2n$ pair. Alors

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\underbrace{f\left(\frac{2\pi n}{N}\right)}_{=f(\pi)=0} + \frac{1}{N}\sum_{j=n+1}^{N-1} \underbrace{f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)}_{=f\left(\frac{2\pi j}{N}-2\pi\right)}\omega^{-kj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{j=n+1}^{N-1} f\left(\frac{2\pi(j-N)}{N}\right)\omega^{-kj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{\ell=-n+1}^{-1} f\left(\frac{2\pi \ell}{N}\right)\omega^{-k(\ell+N)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{8j}{N}\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{\ell=-n+1}^{-1} \frac{8\ell}{N}\omega^{-k\ell} \quad \text{car} \quad -\pi < \frac{2\pi\ell}{N} \leq 0, \quad \omega^{-kN} = 1 \\
&= \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n-1} j\omega^{-kj} - \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n-1} j\omega^{kj} \\
&= \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n-1} j(\omega^{-kj} - \omega^{kj}) \\
&= \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j(\omega^{-kj} - \omega^{kj}) \quad \text{car} \quad \omega^{-kn} - \omega^{kn} = \omega^{-k(n-N)} - \omega^{kn} = 0 \\
&= -\frac{16i}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j\sin\left(\frac{2\pi kj}{N}\right).
\end{aligned}$$

On procède de façon très similaire avec N impair : $N = 2n+1$ et

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{j=n+1}^{2n} \underbrace{f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)}_{=f\left(\frac{2\pi j}{N}-2\pi\right)}\omega^{-kj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{j=n+1}^{2n} f\left(\frac{2\pi(j-N)}{N}\right)\omega^{-kj} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{\ell=n+1-N}^{2n-N} f\left(\frac{2\pi \ell}{N}\right)\omega^{-k(\ell+N)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{\ell=-n}^{-1} f\left(\frac{2\pi \ell}{N}\right)\omega^{-k(\ell+N)} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} \frac{8j}{N}\omega^{-kj} + \frac{1}{N}\sum_{\ell=-n}^{-1} \frac{8\ell}{N}\omega^{-k\ell} \quad \text{car} \quad -\pi < \frac{2\pi\ell}{N} \leq 0, \quad \omega^{-kN} = 1 \\
&= \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j\omega^{-kj} - \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j\omega^{kj} \\
&= \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j(\omega^{-kj} - \omega^{kj}) \\
&= -\frac{16i}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j\sin\left(\frac{2\pi kj}{N}\right).
\end{aligned}$$

Nous pouvons résumer les deux cas précédent en notant $n = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$:

$$z_k = \frac{8}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j(\omega^{-kj} - \omega^{kj}) = -\frac{16i}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j\sin\left(\frac{2\pi kj}{N}\right).$$

3. Pour $N=8$ nous avons

$$y_0 = f(0) = 0, \quad y_1 = f\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 1, \quad y_2 = f\left(\frac{4\pi}{8}\right) = 2, \quad y_3 = f\left(\frac{6\pi}{8}\right) = 3, \quad y_4 = f(\pi) = 0,$$

$$y_5 = f\left(\frac{10\pi}{8}\right) = f\left(-\frac{6\pi}{8}\right) = -3, \quad y_6 = f\left(\frac{12\pi}{8}\right) = f\left(-\frac{4\pi}{8}\right) = -2, \quad y_7 = f\left(\frac{14\pi}{8}\right) = f\left(-\frac{2\pi}{8}\right) = -1.$$

On retrouve bien les y_j de l'exercice précédent et comme précédemment

$$z_k = -\frac{16i}{64}\sum_{j=0}^{4-1} j \sin\left(\frac{2\pi kj}{N}\right) = -\frac{i}{4}\sum_{j=1}^{3} j\sin\left(\frac{2\pi kj}{N}\right).$$

4. Nous avons également pour $k \neq 0$

$$z_k = \frac{8\omega^{-k}}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j(\omega^{-k})^{j-1} - \frac{8\omega^k}{N^2}\sum_{j=1}^{n} j(\omega^k)^{j-1} = \frac{8\omega^{-k}}{N^2}\varphi'(\omega^{-k}) - \frac{8\omega^k}{N^2}\varphi'(\omega^k),$$

avec, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Donc

$$\varphi'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Ainsi pour $N = 2n$ pair, en particulier $\omega^n = e^{\frac{2i\pi n}{N}} = e^{i\pi} = -1$, et

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{8\omega^{-k}}{N^2}\frac{1-(n+1)\omega^{-kn} + n\omega^{-k(n+1)}}{(1-\omega^{-k})^2} - \frac{8\omega^k}{N^2}\frac{1-(n+1)\omega^{kn} + n\omega^{k(n+1)}}{(1-\omega^k)^2} \\
&= \frac{8\omega^{-k}}{N^2}\frac{1-(n+1)(-1)^k + n(-1)^k\omega^{-k}}{(1-\omega^{-k})^2} - \frac{8\omega^k}{N^2}\frac{1-(n+1)(-1)^k + n(-1)^k\omega^k}{(1-\omega^k)^2} \\
&= \frac{8}{N^2}\left(\omega^{-k}\frac{1-(n+1)(-1)^k + n(-1)^k\omega^{-k}}{(1-\omega^{-k})^2} - \omega^k\frac{1-(n+1)(-1)^k + n(-1)^k\omega^k}{(1-\omega^k)^2}\right) \\
&= \frac{8}{N^2}\left(\frac{1-(n+1)(-1)^k + n(-1)^k\omega^{-k}}{(\omega^{\frac{k}{2}} - \omega^{-\frac{k}{2}})^2} - \frac{1-(n+1)(-1)^k + n(-1)^k\omega^k}{(\omega^{-\frac{k}{2}} - \omega^{\frac{k}{2}})^2}\right) \\
&= \frac{8}{N^2}\frac{n(-1)^k}{(\omega^{\frac{k}{2}} - \omega^{-\frac{k}{2}})^2}(\omega^{-k} - \omega^k) \\
&= \frac{8}{N^2}\frac{n(-1)^k}{\left(2i\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)^2}\left(-2i\sin\left(\frac{2k}{N}\right)\right) \\
&= \frac{4in(-1)^k}{N^2}\frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right)}{\left(\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)^2} \\
&= \frac{2i(-1)^k}{N}\frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right)}{\left(\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
|z_k - \hat{f}(k)| &= \left| \frac{2i(-1)^k}{N} \frac{\sin\left(\dfrac{2k\pi}{N}\right)}{\left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{N}\right)\right)^2} - \frac{4(-1)^{k+1}}{i\pi k} \right| \\
&= \left| \frac{2}{N} \frac{\sin\left(\dfrac{2k\pi}{N}\right)}{\left(\sin\left(\dfrac{k\pi}{N}\right)\right)^2} - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&= \left| \frac{2}{N} \frac{\sin(2h_n)}{\left(\sin(h_n)\right)^2} - \frac{4}{\pi k} \right| \quad \text{avec} \quad h_n = \frac{k\pi}{N} \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{2}{N} \frac{2h_n + \dfrac{8h_n^3}{6} + o\left(h_n^3\right)}{\left(h_n + \dfrac{h_n^3}{6} + o(h_n^4)\right)^2} - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{2}{N} \frac{2h_n + \dfrac{4h_n^3}{3} + o\left(h_n^3\right)}{h_n^2 + \dfrac{h_n^4}{3} + o(h_n^4)} - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{2}{Nh_n} \frac{2 + \dfrac{4h_n^2}{3} + o\left(h_n^2\right)}{1 + \dfrac{h_n^2}{3} + o(h_n^2)} - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{2}{k\pi} \left(2 + \frac{4h_n^2}{3} + o\left(h_n^2\right)\right) \left(1 - \frac{h_n^2}{3} + o(h_n^2)\right) - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{2}{k\pi} \left(2 - \frac{2h_n^2}{3} + \frac{4h_n^2}{3} + o(h_n^2)\right) - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{2}{k\pi} \left(2 + \frac{2h_n^2}{3} + o(h_n^2)\right) - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{4}{k\pi} + \frac{4h_n^2}{3k\pi} + o(h_n^2) - \frac{4}{\pi k} \right| \\
&\underset{N\to+\infty}{=} \left| \frac{4k\pi}{3N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right) \right|
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
|z_k - \hat{f}(k)| \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{4k\pi}{3N^2}.
$$