Examen

Durée 1h15

Le polycopié de cours (sans notes manuscrites) est autorisé. Tout autre document est interdit. Le barème est indicatif. Le sujet est sur deux pages.

Exercice 1 (7 points)

On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice B réelle triangulaire inférieure telle que $A = BB^T$ (autrement dit, montrer que A admet une décomposition de Cholesky).
2. Calculer la matrice B pour laquelle les coefficients diagonaux sont positifs.
3. Résoudre, en utilisant cette décompoisition, le système $Ax = b$ où :

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (7 points)

Soient α, β et γ des réels. On définit, pour toute fonction f continue sur $[-1, 1]$, la méthode d'intégration numérique T de la façon suivante :

$$T(f) = \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1). \tag{1}$$

Autrement dit :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1). \tag{2}$$

1. En appliquant la formule de quadrature (1) pour les polynômes $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$ et $f_3(x) = x^2$, donner le système d'équations linéaires à trois inconnus α, β et γ.
2. Déterminer les valeurs des poids α, β et γ par résolution du système précédent en utilisant le pivot de Gauss .
3. Montrer que la formule de quadrature (1) reste exacte pour les polynômes de degré 3.
4. Donner l'ordre d'exactitude de cette formule.

Exercice 3 (6 points)

On souhaite résoudre numériquement l'équation différentielle 3 suivante sur un intervalle $[a, b]$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & -y(t) + t + 1, \quad \forall t \in [a, b] \\ y(a) & = & y_0. \end{array} \right. \tag{3}$$

Pour cela on choisit un pas de discrétisation h, et on note $t_n = a + nh$, $y(t_n)$ la valeur exacte de y en t_n et y_n sa valeur approchée.

1. A partir de l'équation différentielle 3, démontrer que :

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (-y(t) + t + 1)\, dt.$$

2. En remplaçant, l'intégrale par une approximation, notée Φ_n, l'expression des valeurs approchées est donnée par :

$$y_n = y_{n-1} + \Phi_n.$$

   (a) En utilisant la méthode d'Euler, donner l'expression de Φ_n. Calculer les 4 premiers termes de y_n pour $a = 0, b = 1, y_0 = 1, h = 10^{-1}$.

   (b) En utilisant la méthode de Runge, donner l'expression de Φ_n.

   (c) De quel ordre est-il l'erreur de ces méthodes ?