Mathématiques de l'ingénieur 2 - Correction Examen 2023

Dorian Cacitti-Holland

2023-2024

Les commentaires en bleu correspondent à une variante, ceux en rouge à des détails de calcul à rajouter et ceux en vert à des détails non obligatoires qui sont là pour vous aider à comprendre.

Exercice 1.

1. La matrice A est symétrique et les trois sous-matrices principales ont un déterminant strictement positif :
$$\det(1) = 1 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 4 > 0, \quad \det(A) = 36 > 0.$$
Donc la matrice A est symétrique définie positive et donc admet une décomposition de Cholesky.
Variante : On répond à la question 2 d'abord ce qui montre que la matrice A admet une décomposition de Cholesky.

2. On considère (ou on suppose qu'il existe dans le cas de la variante) une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que
   - $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$,
   - $a > 0, c > 0, f > 0$,
   - $A = BB^T$.

   Alors
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 19 \end{pmatrix} = A = BB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ad \\ ba & b^2+c^2 & bd+ce \\ da & db+ec & d^2+e^2+f^2 \end{pmatrix}.$$
   Donc
$$\begin{cases} a^2 & = & 1 \\ ab & = & 1 \\ ad & = & 1 \\ b^2+c^2 & = & 5 \\ bd+ce & = & 7 \\ d^2+e^2+f^2 & = & 19 \end{cases}$$
   Ainsi, comme $a > 0, c > 0, f > 0$,
$$\begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ d & = & 1 \\ c & = & 2 \\ e & = & 3 \\ f & = & 3. \end{cases}$$
   Ainsi la décomposition de Cholesky de la matrice A est donnée par
$$A = BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (Dans la variante on conclut alors que la matrice A admet bien une décomposition de Cholesky donnée par le produit BB^T ainsi déterminé.)

3. Nous avons
$$Ax = b \iff BB^T x = b \iff \left\{ \begin{array}{rcl} By & = & b \\ B^T x & = & y. \end{array} \right.$$
Avec, par méthode de la descente (la matrice B est triangulaire inférieure), (Le calcul est à détailler.)
$$By = b \iff y = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix},$$
et, par méthode de la remontée (la matrice B^T est triangulaire supérieure), (Le calcul est à détailler.)
$$B^T x = y \iff x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. On souhaite une formule de quadrature d'ordre 3 pour avoir trois équations et trouver nos trois inconnus α, β, γ. Nous avons donc pour les fonctions polynomiales f_1, f_2 et f_3
$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha f_1(-1) + \beta f_1(0) + \gamma f_1(1) = \int_{-1}^{1} f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$
$$-\alpha + \gamma = \alpha f_2(-1) + \beta f_2(0) + \gamma f_3(1) = \int_{-1}^{1} f_2(x) = \int_{-1}^{1} xdx = 0$$
et
$$\alpha + \gamma = \alpha f_3(-1) + \beta f_3(0) + \gamma f_3(1) = \int_{-1}^{1} f_3(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$
Ainsi le système linéaire vérifié par les trois inconnus α, β et γ est
$$\left\{ \begin{array}{rcccccl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ -\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & \frac{2}{3} \end{array} \right.$$
On effectue alors la méthode du pivot de Gauss. Nous avons bien un premier pivot non nul $1 \neq 0$. Nous effectuons alors les opérations
$$L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{-1}{1} L_1 = L_2 + L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$$
pour obtenir le système équivalent
$$\left\{ \begin{array}{rcccccl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 2 \\ & - & \beta & & & = & -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$
Nous avons encore un pivot non nul en position $(2, 2)$. Nous effectuons alors l'opération
$$L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{-1}{1} L_2 = L_3 + L_2$$
pour obtenir le système équivalent
$$\left\{ \begin{array}{rcccccl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 2 \\ & & & & 2\gamma & = & \frac{2}{3} \end{array} \right.$$
Il ne reste plus qu'à appliquer la méthode de remontée au système triangulaire supérieur obtenu :
$$\gamma = \frac{1}{3}, \quad \beta = 2 - 2\gamma = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \quad \alpha = 2 - \beta - \gamma = 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$
Nous obtenons alors la méthode d'intégration
$$T(f) = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1)$$

2. Nous avons également, en notant $f_4 = X^3$,

$$\frac{1}{3}f_4(-1) + \frac{2}{3}f_4(0) + \frac{1}{3}f_4(1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \int_{-1}^{1} f_4(x)dx.$$

   Donc la formule de quadrature est exacte pour les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 (et est linéaire), donc reste exacte pour les fonctions polynomiales de degré 3.

3. Par contre nous avons, en notant $f_5 = X^4$,

$$\frac{1}{3}f_5(-1) + \frac{2}{3}f_5(0) + \frac{1}{3}f_5(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \int_{-1}^{1} f_5(x)dx.$$

   Donc la formule de quadrature n'est pas exacte pour les fonctions polynomiales de degré 4. Ainsi l'ordre d'exactitude de cette formule de quadrature est 4 (elle reste exacte pour toutes les fonctions polynomiales de degré au plus 4-1 = 3).

Exercice 3.

1. Nous avons d'après l'équation différentielle vérifiée par la fonction y

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (y(t) + t + 1)dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} y'(t)dt = [y(t)]_{t_{n-1}}^{t_n} = y(t_n) - y(t_{n-1}).$$

   Donc

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (y(t) + t + 1)dt.$$

2. (a) On effectue le changement de variable $t = t_{n-1} + hv, dt = hdv$ dans l'intégrale

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (-y(t) + t + 1)dt = h\int_{0}^{1} (-y(t_{n-1} + hv) + t_{n-1} + hv + 1)dv.$$

   Donc, par approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles à gauche (associée à la méthde d'Euler) $\int_0^1 g(v)dv \simeq g(0)$, nous avons

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (-y(t) + t + 1)dt = h\int_{0}^{1} (-y(t_{n-1} + hv) + t_{n-1} + hv + 1)dv \simeq h(-y(t_{n-1}) + t_{n-1} + 1).$$

   Ainsi, comme on approxime $y(t_{n-1})$ par y_{n-1},

$$\Phi_n = h(-y_{n-1} + t_{n-1} + 1).$$

   En particulier pour $a = 0, b = 1, y_0 = 1, h = \frac{1}{10}$, nous avons

$$y_0 = y(a) = y(0) = 1,$$

$$y_1 = y_0 + h(-y_0 + t_0 + 1) = 1 + h(-1 + 0 + 1) = 1,$$

$$y_2 = y_1 + h(-y_1 + t_1 + 1) = 1 + h(-1 + h + 1) = \frac{101}{100}$$

   et

$$y_3 = y_2 + h(-y_2 + t_2 + 1) = \frac{101}{100} + \frac{1}{10}\left(-\frac{101}{100} + \frac{2}{10} + 1\right) = \frac{1029}{1000}.$$

   (b) Nous avons

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (-y(t) + t + 1)dt = h\int_{0}^{1} (-y(t_{n-1} + hv) + t_{n-1} + hv + 1)dv.$$

Donc nous avons, par approximation de l'intégrale par la méthode du point milieu (associée à la méthode de Runge) $\displaystyle\int_0^1 g(v)dv \simeq g\left(\frac{1}{2}\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{t_{n-1}}^{t_n} (-y(t)+t+1)dt &= h\int_0^1 (-y(t_{n-1}+hv)+t_{n-1}+hv+1)dv \\ &\simeq h\left(-y\left(t_{n-1}+\frac{h}{2}\right)+t_{n-1}+\frac{h}{2}+1\right).\end{aligned}$$

Or $y\left(t_{n-1}+\frac{h}{2}\right)$ n'est pas connue, donc nous l'approximons par la méthode d'Euler

$$\begin{aligned}y\left(t_{n-1}+\frac{h}{2}\right) &= y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+\frac{h}{2}} (-y(t)+t+1)dt \\ &= y(t_{n-1}) + \frac{h}{2}\int_0^1 (-y(t_{n-1}+hv)+t_{n-1}+hv+1)dv \\ &\simeq y(t_{n-1}) + \frac{h}{2}(-y(t_{n-1})+t_{n-1}+1) \\ &\simeq y_{n-1} + \frac{h}{2}(-y_{n-1}+t_{n-1}+1).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (-y(t)+t+1)dt \simeq h\left(-\left(y_{n-1}+\frac{h}{2}(-y_{n-1}+t_{n-1}+1)\right)+t_{n-1}+\frac{h}{2}+1\right).$$

Autrement dit

$$\Phi_n = h\left(-\left(y_{n-1}+\frac{h}{2}(-y_{n-1}+t_{n-1}+1)\right)+t_{n-1}+\frac{h}{2}+1\right) = h\left(\frac{h-2}{2}y_{n-1}+\frac{2-h}{2}t_{n-1}+1\right).$$

(c) La méthode d'Euler ne fait intervenir que la méthode des rectangles à gauche qui est d'ordre 1, donc la méthode d'Euler est d'ordre 1. La méthode de Runge fait intervenir la méthode du point milieu qui est d'ordre 2 et la méthode des rectangles à gauche qui est d'ordre 1, donc la méthode de Runge est d'ordre 1 car les formules intégrales ne sont exactes que pour les fonctions polynomiales de degré au plus $\min(2-1, 1-1) = 0$.