Mathématiques de l'ingénieur 2 - Correction Examen 2024

Dorian Cacitti-Holland

2023-2024

Exercice 1.

1. Les déterminants suivants sont non nuls

$$\det(1) = 1 \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 7 - 4 = 3 \neq 0$$

   et

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 5 & 26 \end{vmatrix} = 3 \times 26 - 5 \times 12 = 78 - 60 = 18 \neq 0.$$

   Donc la matrice A admet une décomposition LU. (1 point)

2. On effectue la méthode du pivot de Gauss pour obtenir la matrice U. On commence par effectuer les opérations

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1$$

   pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

   puis on effectue l'opération

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_2$$

   pour obtenir (1 point)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

   On en déduit la matrice L par les opérations effectuées (1 point)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Nous avons $\det(A) = \det(L)\det(U) = 1 \times 1 \times 3 \times 6 = 18$. (1 point)

4. Nous avons $Ax = b \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} Ly & = & b \\ Ux & = & y \end{array} \right.$ avec par méthode de descente (1 point)

$$y_1 = b_1 = 1, \quad y_2 = b_2 - 2y_1 = -2, \quad y_3 = b_3 - 4y_1 - \frac{5}{3}y_2 = -4 + \frac{10}{3} = -\frac{2}{3}$$

   et par méthode de remontée (1 point)

$$x_3 = \frac{y_3}{6} = -\frac{1}{9}, \quad x_2 = \frac{y_2 - 12x_3}{3} = -\frac{2}{9}, \quad x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = \frac{16}{9}.$$

Exercice 2.

1. Comme la formule de quadrature est d'ordre 2, les poids vérifient le système linéaire (1 point)
$$\left\{\begin{array}{ccccc} b_1 & + & b_2 & = & 1 \\ \frac{1}{3}b_1 & + & \frac{2}{3}b_2 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$
de solution (1 point)
$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}.$$
2. La formule de quadrature est d'ordre 2 mais pas d'ordre 3 car (1 point)
$$b_1c_1^2 + b_2c_2^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\frac{4}{9} = \frac{5}{18} \neq \frac{1}{3}.$$
3. On considère
$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{et} \quad x_0 = a, \quad x_{i+1} = x_i + h \quad 0 \leq i \leq N-1.$$
Alors par relation de Chasles (1 point) et changement de variable (1 point)
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &= h\sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 f(x_i+ht)dt \\ &\simeq \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \left(f\left(x_i + \frac{h}{3}\right) + f\left(x_i + \frac{2h}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Soit $i \in \{0, ..., N-1\}$. Alors, d'après l'équation différentielle vérifiée par la fonction y (1 point) et par changement de variable (1 point),
$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (y(x))^2dx = h\int_0^1 (y(x_i+ht))^2dt.$$
2. Nous avons
$$\begin{aligned} \int_0^1 (y(x_i+ht))^2dt &\simeq \frac{1}{2}\left(y\left(x_i+\frac{h}{3}\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y\left(x_i+\frac{2h}{3}\right)\right)^2 \text{ (1 point)} \\ &\simeq \frac{1}{2}\left(y(x_i) + \frac{h}{3}(y(x_i))^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y(x_i) + \frac{2h}{3}(y(x_i))^2\right)^2 \text{ (1 point)} \\ &= (y(x_i))^2 + h(y(x_i))^3 + \frac{5h^2}{18}(y(x_i))^4. \end{aligned}$$
Par conséquent (1 point)
$$y_{i+1} = y_i + hy_i^2 + h^2y_i^3 + \frac{5h^3}{18}y_i^4$$

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors, comme la fonction f est paire,
$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}f(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}|x|dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx}xdx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}xdx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx}xdx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{inx}xdx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nx)xdx. \end{aligned}$$

Puis en $n = 0$

$$c_0(f) = \frac{\pi}{2}$$

et pour $n \neq 0$, par intégration par parties (2 points)

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}dx \\ &= \frac{\sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right] \\ &= 0 + \frac{\cos(n\pi)}{\pi n^2} - \frac{1}{\pi n^2} \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \end{aligned}$$

2. La fonction f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc, par théorème de Dirichlet, (1 point) la série de Fourier de la fonction f est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et, comme la fonction f est de plus continue, (1 point)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = f(x).$$

3. En $x = 0$ nous obtenons (1 point)

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = 0$$

i.e.

$$\frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}$$

i.e. (1 point)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$