Mathématiques de l'ingénieur 2 - Examen blanc

Dorian Cacitti-Holland

2023-2024

1 Pivot de Gauss

On considère le système linéaire suivant $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0. \end{array}\right.$

1. Montrer qu'il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système linéaire précédent.
2. Le déterminer à partir de la méthode du pivot de Gauss.
3. Détermier le nombre d'opérations effectuées (soustractions, multiplications, divisions).
4. Déterminer l'inverse A^{-1} de la matrice A associée à ce système grâce à la méthode de Gauss-Jordan.

2 Factorisation LU

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A admet une factorisation LU : $A = LU$.
2. Déterminer les matrices U et L.
3. On considère le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A partir de la décomposition LU de la matrice A, résoudre le système linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.
4. Déterminer le nombre d'opérations effectuées (soustractions, multiplications, divisions).

3 Factorisation de Cholesky

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 13 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 11 & 8 \\ 2 & 8 & 8 & 18 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A admet une factorisation de Cholesky $A = BB^T$.
2. Déterminer la matrice B.
3. Résoudre $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 33 \\ 29 \\ 36 \end{pmatrix}$ en utilisant la factorisation de Cholesky de la matrice A.
4. Déterminer le nombre d'opérations effectuées (soustractions, multiplications, divisions, racines carrés).

4 Intégration numérique

On considère une formule de quadrature d'ordre 3 à trois nœuds

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{2}{3},$$

et leurs poids associés b_1, b_2, b_3.

1. Quels relations relient les poids b_1, b_2, b_3 ? En déduire leurs valeurs.
2. Quel est l'ordre maximal de cette formule de quadrature ?
3. Déduire les expressions approchées, par cette méthode, des intégrales

$$\int_0^1 g(t)dt, \quad \int_a^b f(x)dx.$$

On pourra considérer une subdivision régulière $a = x_0 < ... < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$ pour la seconde intégrale, autrement dit de pas $h = \frac{b-a}{N}$.

5 Equation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $[0, \bar{t}] \subset [0, 1]$, $\begin{cases} y'(t) & = & (y(t))^2, \\ y(0) & = & \frac{1}{2}. \end{cases}$

On choisit un pas de discrétisation $h = \frac{\bar{t}}{N}$ de la subdivision régulière de $[0, \bar{t}]$ et on note $t_k = hk$ et y_k la valeur approchée de $y(t_k)$.

1. Démontrer que $y(t_{k+1}) = y(t_k) + h \int_0^1 (y(ht + hk))^2 dt$.
2. En approximant l'intégrale par la méthode des rectangles à gauche, donner la valeur de y_{k+1} en fonction de y_k.
3. Faire de même avec la formule de quadrature de l'exercice précédent.
4. Donner l'ordre de ces deux méthodes.

6 Séries de Fourier

On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $\quad \forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = e^x$.

1. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f), n \in \mathbb{Z}$ de la fonction f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f et donner sa valeur en fonction de la fonction f.
3. En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

7 Transformée de Fourier continue

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < -1 \\ 1+x & \text{si} & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} & 1 < x. \end{cases}$

1. Déterminer la transformée de Fourier continue de la fonction f. On donnera une expression faisant intervenir un sinus cardinal.
2. En déduire la transformée de Fourier continue de la fonction g donnée par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = (\text{sinc}(y))^2 = \frac{(\sin(y))^2}{y^2}.$$