Mathématiques de l'ingénieur 2 - Examen blanc

Dorian Cacitti-Holland

2023-2024

1 Pivot de Gauss

On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0. \end{array}\right.$$

1. Montrer qu'il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant le système linéaire précédent.
2. Le déterminer à partir de la méthode du pivot de Gauss.
3. Détermier le nombre d'opérations effectuées (soustractions, multiplications, divisions).
4. Déterminer l'inverse A^{-1} de la matrice A associée à ce système linéaire grâce à la méthode de Gauss-Jordan.

Correction.

1. Le système est équivalent à l'équation matriciel $AX = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons d'après la règle de Sarrus (par exemple)

$$\det(A) = 2 + 2 + 2 - 8 - 1 - 1 = -4 \neq 0.$$

Donc la matrice A est inversible et le système admet une unique solution.

2. Le premier pivot est non nul $1 \neq 0$ et on effectue les opérations

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2,$$

pour obtenir le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ & - & y & - & 3z & = & -6. \end{array}\right.$$

Le second pivot est également non $1 \neq 0$ et on effectue l'opération

$$L_3 \longleftarrow L_3 - (-1)L_2 = L_3 + L_2$$

pour obtenir le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ & & y & - & z & = & -2 \\ & & & - & 4z & = & -8. \end{array}\right.$$

Nous arrivons à un système échelonné auquel nous pouvons appliquer la méthode de remontée :

$$z = 2, \quad y = -2 + z = 0, \quad x = 3 - y - 2z = -1.$$

3. Nous avons effectué
   - 3 soustractions pour effectuer l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$.
   - 3 multiplications et 3 soustractions pour effectuer l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$.
   - 2 additions/soustractions pour effectuer l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$.
   - 1 division pour calculer z.
   - 1 addition/soustraction pour calculer y.
   - 1 multiplication et 2 soustractions pour calculer x.

   Au total nous

   11 soustractions, 4 multiplications et 1 division.

4. Effectuons la méthode de Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_1 \longleftarrow L_1 - L_2, \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{3}{4}L_3, \quad L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{1}{4}L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad L_3 \longleftarrow -\frac{1}{4}L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

2 Factorisation LU

On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A admet une factorisation LU : $A = LU$.
2. Déterminer les matrices U et L.
3. On considère le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A partir de la décomposition LU de la matrice A, résoudre le système linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

4. Déterminer le nombre d'opérations effectuées (soustractions, multiplications, divisions).

Correction.

1. Nous avons
$$\det(1) = 1 \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 2 \neq 0, \quad \det(A) = 42 + 12 - 10 + 18 - 10 - 28 = 24 \neq 0.$$
Donc la matrice A admet une factorisation LU.
Variante : Nous pouvons répondre à la question 1 en répondant à la question 2 en supposant que la matrice A admet une factorisation LU et la déterminer par conditions nécessaires.

2. Nous effectuons les opérations
$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 1L_1$$
pour obtenir
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$
Puis nous effectuons l'opération
$$L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{-4}{2}L_2 = L_3 + 2L_2$$
pour obtenir
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$
Puis grâce aux opérations effectuées nous avons
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Nous avons
$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} Ly & = & b \\ Ux & = & y, \end{array} \right.$$
avec pour le premier système par méthode de descente :
$$y_1 = b_1 = 1, \quad y_2 = b_2 - 2 \times y_1 = -1 - 2 = -3, \quad y_3 = b_3 - y_1 + 2y_2 = 2 - 1 - 6 = -5.$$
Puis pour le second système par méthode de remontée
$$x_3 = \frac{y_3}{12} = -\frac{5}{12}, \quad x_2 = \frac{y_2 - x_3}{2} = \frac{-3 + \frac{5}{12}}{2} = -\frac{31}{24}, \quad x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 + \frac{31}{12} - \frac{15}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}.$$
Par conséquent la solution du système $Ax = b$ est $x = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{31}{24} \\ -\frac{5}{12} \end{pmatrix}$.

4. Nous avons effectué :
   - 2 multiplications et 2 soustractions pour effectuer $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$.
   - 2 soustractions pour effectuer $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$.
   - 1 division, 1 multiplication et 1 soustraction pour effectuer $L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{-4}{2}L_2$.

- Rien pour calculer y_1.
- 1 multiplication et 1 soustraction pour calculer y_2.
- 1 multiplication et 2 additions/soustractions pour calculer y_3.
- 1 division pour calculer x_3.
- 1 soustraction et 1 division pour calculer x_2.
- 2 multiplications et 2 soustractions pour calculer x_1.

Au total nous avons

$$7 \text{ multiplications, } 11 \text{ soustractions et } 3 \text{ divisions.}$$

3 Factorisation de Cholesky

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 13 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 11 & 8 \\ 2 & 8 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A admet une factorisation de Cholesky $A = BB^T$.
2. Déterminer la matrice B.
3. Résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 33 \\ 29 \\ 36 \end{pmatrix}$ en utilisant la factorisation de Cholesky de la matrice A.
4. Déterminer le nombre d'opérations effectuées (soustractions, multiplications, divisions, racines carrés).

Correction.

1. Nous avons
$$\det(1) = 1 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix} = 13 - 9 = 4 > 0,$$
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 13 & 9 \\ 1 & 9 & 11 \end{pmatrix} = 143 + 27 + 27 - 13 - 81 - 99 = 4 > 0$$
et
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 13 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 11 & 8 \\ 2 & 8 & 8 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -26 \\ 0 & 0 & -8 & -36 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times 2 \times (6 \times 36 - 8 \times 26) = 2(216 - 208) = 16 > 0.$$
De plus la matrice A est symétrique ($A^T = A$), donc la matrice A est symétrique définie positive, donc admet une décomposition de Cholesky.
Variante : Nous pouvons répondre à la question 1 en répondant à la question 2 en supposant que la matrice A admet une factorisation de Cholesky et la déterminer par conditions nécessaires.

2. (On suppose qu') Il existe $a > 0, b, c, d, e > 0, f, g, h > 0, i, j > 0$ tels que
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 13 & 9 & 8 \\ 1 & 9 & 11 & 8 \\ 2 & 8 & 8 & 18 \end{pmatrix} = A = BB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 \\ c & f & h & 0 \\ d & g & i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2+e^2 & bc+ef & bd+eg \\ ac & bc+ef & c^2+f^2+h^2 & cd+fg+hi \\ ad & bd+eg & cd+fg+hi & d^2+g^2+i^2+j^2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{rcc} 1 & = & a^2 \\ 3 & = & ab \\ 1 & = & ac \\ 2 & = & ad \\ 13 & = & b^2+e^2 \\ 9 & = & bc+ef \\ 8 & = & bd+eg \\ 11 & = & c^2+f^2+h^2 \\ 8 & = & cd+fg+hi \\ 18 & = & d^2+g^2+i^2+j^2 \end{array}\right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 3 \\ c & = & 1 \\ d & = & 2 \\ e & = & 2 \\ f & = & 3 \\ g & = & 1 \\ h & = & 1 \\ i & = & 3 \\ j & = & 2. \end{array}\right.$$

Par conséquent la décomposition de Cholesky de la matrice A est donnée par

$$A = BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Nous avons

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} By & = & b \\ & & \\ B^T x & = & y, \end{array}\right.$$

avec pour le premier système par méthode de descente :

$$y_1 = b_1 = 7, \quad y_2 = \frac{b_2 - 3\times y_1}{2} = \frac{33-21}{2} = 6, \quad y_3 = b_3 - y_1 - 3y_2 = 29 - 7 - 18 = 4$$

et

$$y_4 = \frac{b_4 - 2y_1 - y_2 - 3y_3}{2} = \frac{36-14-6-12}{2} = 2.$$

Puis pour le second système par méthode de remontée

$$x_4 = \frac{y_4}{2} = 1, \quad x_3 = y_3 - 3x_4 = 4 - 3 = 1, \quad x_2 = \frac{y_2 - 3x_3 - x_4}{2} = \frac{6-3-1}{2} = 1$$

et

$$x_1 = y_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 7 - 3 - 1 - 2 = 1.$$

Par conséquent la solution du système $Ax = b$ est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Nous avons effectué :

- 1 racine carrée pour calculer a.
- Rien pour calculer b, c, d (car $a = 1$).
- 1 multiplication, 1 soustraction et 1 racine carrée pour calculer e.
- 1 soustraction et 1 division pour calculer f.
- 1 multiplication, 1 soustraction et 1 division pour calculer g.
- 1 multiplication, 2 soustractions et 1 racine carrée pour calculer h.
- 2 soustractions pour calculer i.
- 2 multiplications, 3 soustractions et 1 racine carrée pour calculer j.
- 1 soustraction pour calculer y_1.

- 1 multiplication, 1 soustraction et 1 division pour calculer y_2.
- 1 multiplication et 2 soustractions pour calculer y_3.
- 2 multiplications, 3 soustractions et 1 division pour calculer y_4.
- 1 division pour calculer x_4.
- 1 multiplication et 1 soustraction pour calculer x_3.
- 1 multiplication, 2 soustractions et 1 division pour calculer x_2.
- 2 multiplications et 3 soustractions pour calculer x_1.

Au total nous avons

3 racines carrées, 13 multiplications, 23 soustractions et 5 divisions.

4 Intégration numérique

On considère une formule de quadrature d'ordre 3 à trois nœuds

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{3}, \quad c_3 = \frac{2}{3},$$

et leurs poids associés b_1, b_2, b_3.

1. Quels relations relient les poids b_1, b_2, b_3 ? En déduire leurs valeurs.
2. Quel est l'ordre maximal de cette formule de quadrature ?
3. Déduire les expressions approchées, par cette méthode, des intégrales

$$\int_0^1 g(t)dt, \quad \int_a^b f(x)dx.$$

On pourra considérer une subdivision régulière $a = x_0 < ... < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$ pour la seconde intégrale, autrement dit de pas $h = \dfrac{b-a}{N}$.

Correction.

1. Comme la formule de quadrature est d'ordre 3 nous avons

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1 \\ & & \frac{1}{3}b_2 & + & \frac{2}{3}b_3 & = & \frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{9}b_2 & + & \frac{4}{9}b_3 & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

i.e., en effectuant les opérations $L_2 \longleftarrow 6L_2$ et $L_3 \longleftarrow 9L_3$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1 \\ & & 2b_2 & + & 4b_3 & = & 3 \\ & & b_2 & + & 4b_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

i.e., en effectuant l'opération $L_2 \longleftrightarrow L_3$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1 \\ & & b_2 & + & 4b_3 & = & 3 \\ & & 2b_2 & + & 4b_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

i.e., en effectuant l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} b_1 & + & b_2 & + & b_3 & = & 1 \\ & & b_2 & + & 4b_3 & = & 3 \\ & & & - & 4b_3 & = & -3 \end{array}\right.$$

i.e., par méthode de remontée

$$b_3 = \frac{3}{4}, \quad b_2 = 3 - 4b_3 = 0, \quad b_1 = 1 - b_2 - b_3 = \frac{1}{4}.$$

2. Nous avons
$$b_1c_1^3 + b_2c_2^3 + b_3c_3^3 = 0 + 0 + \frac{3}{4}\frac{8}{27} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{3}.$$
Donc l'ordre maximal de cette formule de quadrature est 3.

3. Nous avons pour la première intégrale
$$\int_0^1 g(t)dt \simeq \frac{1}{4}g(0) + \frac{3}{4}g\left(\frac{2}{3}\right).$$
Puis pour la seconde intégrale en considérant une subdivision régulière $a = x_0 < ... < x_N = b$ de l'intervalle $[a, b]$ nous avons
$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{N-1}\int_0^1 f(x_i + ht)dt \simeq \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x_i) + 4f\left(x_i + \frac{2}{3}h\right)\right).$$

5 Equation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $[0, \bar{t}] \subset [0, 1]$,
$$\begin{cases} y'(t) & = & (y(t))^2, \quad 0 \leq t \leq \bar{t} \\ y(0) & = & \frac{1}{2}. \end{cases}$$
On choisit un pas de discrétisation $h = \frac{\bar{t}}{N}$ de la subdivision régulière de $[0, \bar{t}]$ et on note $t_k = hk$ et y_k la valeur approchée de $y(t_k)$.

1. Démontrer que
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\int_0^1 (y(ht + hk))^2 dt.$$
2. En approximant l'intégrale par la méthode des rectangles à gauche, donner la valeur de y_{k+1} en fonction de y_k.
3. Faire de même avec la formule de quadrature de l'exercice précédent.
4. Donner l'ordre de ces deux méthodes.

Correction.

1. Nous avons d'après l'équation différentielle
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (y(t))^2 dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)dt = [y(t)]_{t_k}^{t_{k+1}} = y(t_{k+1}) - y(t_k).$$
Puis par changement de variable $t = t_k + hv, dt = hdv$ nous avons
$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = h\int_0^1 (y(t_k + hv))^2 dv = h\int_0^1 (y(hk + hv))^2 dv$$
i.e.
$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\int_0^1 (y(ht + hk))^2 dt.$$
2. Nous avons
$$y(t_{k+1}) \simeq y_k + h(y(hk))^2 = y_k + h(y(t_k))^2 \simeq y_k + hy_k^2.$$
Donc
$$y_{k+1} = y_k + hy_k^2.$$

3. Nous avons cette fois-ci avec la formule de quadrature de l'exercice précédent

$$y(t_{k+1}) \simeq y_k + \frac{h}{4}\left((y(hk))^2 + 3\left(y\left(hk + \frac{2}{3}h\right)\right)^2\right) = y_k + \frac{h}{4}\left((y(t_k))^2 + 3\left(y\left(t_k + \frac{2}{3}h\right)\right)^2\right)$$

$$\simeq y_k + \frac{h}{4}\left(y_k^2 + 3\left(y\left(t_k + \frac{2}{3}h\right)\right)^2\right),$$

où $y\left(t_k + \frac{2}{3}h\right)$ est inconnu que nous approchons par la méthode d'Euler :

$$y\left(t_k + \frac{2}{3}h\right) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_k+\frac{2}{3}h} (y(t))^2 dt = y(t_k) + \frac{2}{3}h\int_0^1 (y(t_k + hv))^2 dv \simeq y_k + \frac{2}{3}h(y(t_k))^2$$

$$\simeq y_k + \frac{2}{3}hy_k^2.$$

Finalement

$$y(t_{k+1}) \simeq y_k + \frac{h}{4}\left(y_k^2 + 3\left(y_k + \frac{2}{3}hy_k^2\right)^2\right) = y_{k+1}.$$

4. Ces deux méthodes sont d'ordre 1 car font intervenir la méthode des rectangles à gauche qui est d'ordre 1.

6 Séries de Fourier

On considère la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = e^x.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f), n \in \mathbb{Z}$ de la fonction f.
2. Etudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f et donner sa valeur en fonction de la fonction f.
3. En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Correction.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(1-inx)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi(1-in)} - e^{-\pi(1-in)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi}e^{-i\pi n} - e^{-\pi}e^{i\pi n}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n\right) \\
&= \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1-in)} \\
&= \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})(1+in)}{2\pi(1-in)(1+in)} \\
&= \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})(1+in)}{2\pi(1+n^2)} \\
&= \frac{(-1)^n\operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)}(1+in).
\end{aligned}$$

2. La fonction f est de classe C^1 par morceaux et 2π-périodique, donc, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de la fonction f est (normalement) convergente et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n\operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)}(1+in)e^{inx} = S(f)(x) = \frac{\lim_{x+} f + \lim_{x-} f}{2}$$

Donc pour tout $x \in]-\pi,\pi]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n\operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)}(1+in)e^{inx} = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \neq \pi \\ \dfrac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} & \text{si} \quad x = \pi \end{cases} = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \neq \pi \\ \operatorname{ch}(\pi) & \text{si} \quad x = \pi \end{cases}$$

3. Nous avons en $x = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n\operatorname{sh}(\pi)}{\pi(1+n^2)}(1+in) = e^0 = 1.$$

Donc en prenent la partie réelle

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\operatorname{sh}(\pi)} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} + 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} + 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{-m}}{1+(-m)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} + 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{1+m^2} \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi - \mathrm{sh}(\pi)}{2\mathrm{sh}(\pi)}.$$

7 Transformée de Fourier continue

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 1+x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x. \end{cases}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier continue de la fonction f. On donnera une expression faisant intervenir un sinus cardinal.

2. En déduire la transformée de Fourier continue de la fonction g donnée par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad g(y) = (\mathrm{sinc}(y))^2 = \frac{(\sin(y))^2}{y^2}.$$

Correction.

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Alors si $\xi = 0$ nous avons

$$\mathcal{F}(f)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{0}^{1} f(x)dx = 1.$$

Et si $\xi \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(\xi) &= \int_{-1}^{1} f(x)e^{-i\xi x}dx \\
&= \int_{0}^{1} f(x)e^{-i\xi x}dx + \int_{-1}^{0} f(x)e^{-i\xi x}dx \\
&= \int_{0}^{1} f(x)e^{-i\xi x}dx + \int_{0}^{1} \underbrace{f(-x)}_{=f(x)} e^{i\xi x}dx \\
&= 2\int_{0}^{1} f(x)\cos(\xi x)dx \\
&= 2\int_{0}^{1} \underbrace{f(1-t)}_{=t}\underbrace{\cos(\xi(1-t))}_{=\cos(\xi(t-1))}dt \\
&= 2\left[t\frac{\sin(\xi(t-1))}{\xi}\right]_0^1 - \frac{2}{\xi}\int_0^1 \sin(\xi(t-1))dt \\
&= 0 - 0 - \frac{2}{\xi}\left[-\frac{\cos(\xi(t-1))}{\xi}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\xi^2}\left(1-\cos(-\xi)\right) \\
&= \frac{2(1-\cos(\xi))}{\xi^2} \\
&= -\frac{e^{\xi} - 2e^{\frac{\xi}{2}}e^{-\frac{\xi}{2}} + e^{-\xi}}{\xi^2} \\
&= -\frac{(e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}})^2}{\xi^2} \\
&= 4\frac{\left(\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2}{\xi^2} \\
&= \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

2. Nous avons $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ car $|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{4}{\xi^2}$ et $\xi \longmapsto \frac{1}{\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc, d'après le théorème d'inversion de Fourier, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\mathcal{F}(f)(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} g\left(\frac{\xi}{2}\right)d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2yx}g(y)dy \qquad y = \frac{\xi}{2}, dy = \frac{d\xi}{2} \\
&= \frac{1}{\pi}\mathcal{F}(g)(-2x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{F}(g)(x) = \pi f\left(-\frac{x}{2}\right) = \left\{\begin{array}{rl} 0 & \text{si} \quad -\frac{x}{2} < -1 \\ 1-\frac{x}{2} & \text{si} \quad -1 \leq -\frac{x}{2} \leq 0 \\ 1+\frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 < -\frac{x}{2} \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < -\frac{x}{2}. \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{rl} 0 & \text{si} \quad x > 2 \\ 1-\frac{x}{2} & \text{si} \quad 2 \geq x \geq 0 \\ 1+\frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 > x \geq 2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 > x. \end{array}\right.$$