Théorème des familles normales de Montel

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Queffélec et Zuily

Leçons.

1. 201 Espaces de fonctions, exemples et applications
2. 203 Utilisation de la notion de compacité
3. 245 Fonctions d'une variable complexe, exemples et applications

Théorème. Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $A \subset H(\Omega)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :
- A est une famille normale, ie localement bornée.
- A est relativement compact dans $(H(\Omega), \delta)$.

Démonstration.
Etape 1 : Sens indirect
On suppose que A est relativement compact, soit K compact de Ω, alors il exite $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$K \subset K_n$$

Soit $\varepsilon \in]0,1]$, or A est relativement compact, donc A est précompact.
Ainsi il existe $f_1, ..., f_q \in A$ tel que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{q} B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$$

ie pour tout $f \in A$, il existe $j \in [\![1,q]\!]$ tel que $\delta(f, f_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.
En particulier

$$2^{-n}\frac{p_n(f-f_j)}{1+p_n(f-f_j)} \leq \delta(f, f_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

Puis, par simplification,

$$p_n(f-f_j) \leq \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \leq \varepsilon$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$p_n(f) = p_n(f-f_j+f_j) \leq \varepsilon + p_n(f_j) \leq \varepsilon + \underset{1\leq j\leq q}{max}(p_n(f_j)) =: M(K_n)$$

Par conséquent

$$\forall z \in K \subset K_n, |f(z)| \leq p_n(f) \leq M(K_n) =: M(K)$$

Ce qui montre que A est localement borné.

<u>Etape 2 : Sens direct</u>

On suppose que A est une famille normale.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, comme $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

0n considère $A_N = \{f_{|K_N}, f \in A\}$, alors, comme par hypothèse A est localement bornée, d'après le lemme suivant, A_N est équicontinue.

De plus, comme K_N est compact, A_N est bornée par $M(K_N)$.

Donc, d'après le théorème d'Ascoli, $A_N \subset C(K_N)$ est relativement compact dans $C(K_N)$ complet (pour la norme infini p_N).

Ainsi A_N est précompact, ie il existe $f_1, ..., f_q \in A$ tel que

$$\forall f \in A, \exists j \in [\![1, q]\!], p_N(f, f_j) = p_N\left(f_{|K_n}, f_{j|K_n}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi

$$\forall f \in A, \exists j \in [\![1, q]\!], \delta(f, f_j) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \frac{p_n(f - f_j)}{1 + p_n(f - f_j)} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f - f_j)}{1 + p_n(f - f_j)}$$

Puis

$$\forall f \in A, \exists j \in [\![1, q]\!], \delta(f, f_j) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \underbrace{p_n(f - f_j)}_{\leq p_N(f - f_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc A est précompact dans $H(\Omega)$ complet, d'où A est relativement compact. $\square$

Lemme. Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$ et $A \subset H(\Omega)$ localement bornée, ie pour tout compact K de Ω il existe $M(K) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall f \in A, \forall z \in K, |f(z)| \leq M(K)$$

Alors pour tout compact K de Ω, il existe $\lambda(K) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall f \in A, \forall (z_1, z_2) \in K^2, |f(z_1) - f(z_2)| \leq \lambda(K)|z_1 - z_2|$$

Démonstration.

Soit K compact de Ω.

Or Ω est ouvert, donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$K_{2r} := \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq 2r\} \begin{array}{l} \subset \Omega \\ \supset K \end{array}$$

De plus K_{2r} est compact, donc par bornitude locale de A, il existe $M = M(K_{2r}) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall f \in A, \forall z \in K_{2r}, |f(z)| \leq M$$

Soit $f \in A$ et $(z_1, z_2) \in K^2 \subset K_{2r}^2$, on considère $\lambda(K) = \frac{2M}{r} \in \mathbb{R}_+^*$, donc :

- Si $|z_1 - z_2| > r$ alors, par inégalité trianglaire,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2M \leq \frac{2M}{r}|z_1 - z_2| = \lambda(K)|z_1 - z_2|$$

- Si $[z_1 - z_2| \leq r$ alors on considère γ le cercle de centre z_1 et de rayon $2r$ parcouru une fois dans le sens direct.

  Donc, par inégalité triangulaire,

$$\forall w \in Im(\gamma), 2r = |w - z_1| \leq |w - z_2| + |z_1 - z_2| \leq |w - z_2| + r$$

  D'où

$$\forall w \in Im(\gamma), |w - z_2| \geq r$$

  Or d'après la formule de Cauchy,

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(w) \left(\frac{1}{w - z_1} - \frac{1}{w - z_2} \right) dw = \frac{z_1 - z_2}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_1)(w - z_2)} dw$$

  Donc

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \frac{M}{2r^2} 2\pi r = \lambda(K)|z_1 - z_2|$$

$\square$