Lemme de Morse

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Leçons.

1. 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes
2. 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie, orthogonalité, isotropie, applications
3. 171 Formes quadratiques réelles, coniques, exemples et applications
4. 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites, exemples et applications en analyse et en géométrie
5. 215 Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, exemples et applications

Lemme. Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMA_0M \end{array}$$

Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$, U un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ et $\chi : V \longrightarrow U$ un C^1-difféomorphisme tels que

$$\forall A \in V, \exists! M (= \chi(A)) \in U, A = \varphi(\chi(A)) = {}^t\chi(A)A_0\chi(A) = {}^tMA_0M$$

Démonstration.
Etape 1 : Surjectivité de $d\varphi(I_n)$ et noyau
Comme φ est polynomiale, φ est de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \forall H \in M_n(\mathbb{R}), \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^t(I_n + H)A_0(I_n + H) - {}^tI_nA_0I_n \\ &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|) \end{aligned}$$

car $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ et en munissant $M_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle quelconque par équivalence des normes en dimension finie.
Ainsi

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), d\varphi(I_n)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$$

Donc $ker(d\varphi(I_n)) = \{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0 H \in A_n(\mathbb{R})\}$ et $Im(d\varphi(I_n)) = S_n(\mathbb{R})$ car $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), d\varphi(I_n)\left(\frac{1}{2}A_0^{-1}A\right) = A$, ce qui montre que $d\varphi(I_n) : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Etape 2 : Application du théorème d'inversion locale

On considère

$$F = \{M \in M_n(\mathbb{R}), A_0 M \in S_n(\mathbb{R})\}$$

Or toute matrice se décompose de manière unique en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrie, donc

$$M_n(\mathbb{R}) = ker(d\varphi(I_n)) \oplus F$$

Soit $\psi : F \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ la restriction de φ à F.
Alors la différentielle $d\psi(I_n)$, restriction de $d\varphi(I_n)$ à F, est bijective.
Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de I_n dans $F \cap GL_n(\mathbb{R})$ (car $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$) tel que $\psi : U \longrightarrow \psi(U) =: V$ soit un C^1-difféomorphisme.
Ainsi V est un voisinage de $A_0 = \psi(I_n) = \varphi(I_n)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall A \in V, \exists! M \in U, A = \psi(M) = {}^tM A_0 M$$

Où $M = \psi^{-1}(A)$ et $\chi := \psi^{-1}$ continûment différentiable. □

Théorème. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 tel que 0 soit un point critique quadratique non dégénéré de f (ie $df(0) = 0$ et la forme bilinéaire $d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$), alors il existe V, W deux voisinages de 0 et un C^1-difféomorphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que

$$\varphi(0) = 0 \ et \ \ \forall x \in V, \quad f(x) - f(0) = \varphi(x)_1^2 + ... + \varphi(x)_p^2 - \varphi(x)_{p+1}^2 - ... - \varphi(x)_n^2$$

Démonstration.

Etape 1 : Application du lemme précédent

D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, il existe un voisinage V_1 de 0 dans U tel que

$$\forall x \in V_1, \quad f(x) - f(0) = {}^t\nabla f(0)x + {}^tx \int_0^1 (1-t)H_f(tx)dtx = 0 + {}^txQ(x)x$$

Avec $Q(x) = \int_0^1 (1-t)H_f(tx)dx$ matrice symétrique et $Q : V \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 (car f de classe C^3).
Or $Q(0) = \frac{1}{2}H_f(0)$ est non dégénérée, donc

$$Q(0) \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$$

Donc, d'après le lemme précédent, il existe un voisinage W_1 de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall A \in W_1, \exists M \in GL_n(\mathbb{R}), A = {}^tMQ(0)M$$

Or Q est de classe C^1 et à valeurs dans $S_n(\mathbb{R})$, donc il existe un voisinage V_2 de 0 dans V_1 tel que pour x dans ce voisinage V_2,

$$Q(x) \in W_1$$

Ainsi il existe $M(x) \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$Q(x) = {}^tM(x)Q(0)M(x)$$

Or, avec les notations du lemme précédent on a

$$M(x) = \chi(Q(x))$$

D'où M est de classe C^1 sur le voisinage V_2 de 0 comme composé de telles applications.
Par conséquent, pour x dans le voisinage V_2 de 0 et $y(x) = M(x)x$,

$$f(x) - f(0) = {}^txQ(x)x = {}^tx^tM(x)Q(0)M(x)x = {}^ty(x)Q(0)y(x)$$

<u>Etape 2 : Réduction de forme quadratique</u>
Or $Q(0) = \frac{1}{2}H_f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que

$$Q(0) = {}^tAdiag(I_p, -I_{n-p})A$$

D'où, pour x dans le voisinage V_2 de 0, en notant $\varphi(x) := Ay(x)$,

$$f(x)-f(0) = {}^ty(x)Q(0)y(x) = {}^ty(x)^tAdiag(I_p, I_{n-p})Ay(x) = \varphi(x)_1^2+...+\varphi(x)_p^2-\varphi(x)_{p+1}^2-...-\varphi(x)_n^2$$

Ainsi l'application φ, définie sur le voisinage V_2 de 0 par $\varphi(x) = Ay(x) = AM(x)x$, a pour différentielle en 0

$$d\varphi(0) = AM(0) \in GL_n(\mathbb{R})$$

car, comme M est de classe C^1 en 0,

$$\varphi(x) - \varphi(0) - AM(0)x = AM(x)x - 0 - AM(0)x = A(M(x) - M(0))x \underset{\|x\| \to 0}{=} o(\|x\|)$$

Donc, par théorème d'inversion locale, φ réalise un C^1 difféomorphisme entre deux voisinages V, W de $0 = \varphi(0)$. $\square$