Méthode de Newton

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Leçons.

1. 223 Suites numériques, convergence, valeurs d'adhérence, exemples et applications
2. 226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, exemples, applications à la résolution approchée d'équations
3. 228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle, exemples et applications
4. 229 Fonctions monotones, fonctions convexes, exemples et applications

Théorème. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in C^2([a, b], [a, b])$ tel que $f(a) < 0 < f(b)$, et $f' > 0$, alors f admet un unique zéro en $l \in [a, b]$, il existe $I \subset [a, b]$ tel que

$$l \in I, \forall x \in I, F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \in I$$

Et pour toute suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On ait $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Démonstration.
<u>Etape 1 : f admet un unique zéro</u>
La fonction f est continue sur $[a, b]$ avec $f(a) < 0 < f(b)$, donc par théorème des valeurs intermédiaires il existe $l \in [a, b]$ tel que

$$f(l) = 0$$

Or $f' > 0$ donc f est strictement croissante, en particulier injectif, d'où l est unique.
<u>Etape 2 : Construire I intervalle autour de l stable par $id_{\mathbb{R}} - \frac{f}{f'}$</u>

Or $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$, donc d'après la formule de Taylor-Lagrange, on a que, pour tout x dans $[a,b]$, il existe $z \in]min(l,x), max(l,x)[$ tel que

$$0 = f(l) = f(x) + (l-x)f'(x) + \frac{1}{2}(l-x)^2 f''(z)$$

Donc

$$F(x) - l = x - l - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-l)f'(x) - f(x)}{f'(x)} = \frac{(l-x)^2 f''(z)}{2f'(x)}$$

Ainsi, avec $C = \frac{max(|f''|)}{2min(f')} \in \mathbb{R}_+$ car $f \in C^2([a,b])$, on a

$$\forall x \in [a,b], |F(x) - l| \leq C|x-l|^2$$

Or $l \in]a,b[$, donc il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $I = [l-\delta, l+\delta] \subset [a,b]$ et quitte à prendre δ plus petit, on peut supposer $C\delta < 1$.
Donc

$$\forall x \in I, |F(x) - l| \leq C\delta^2 < \delta$$

D'où

$$\forall x \in I, F(x) \in]l-\delta, l+\delta[= I$$

On a ainsi construit I stable par F.
Etape 3 : Approcher l par une suite récurrente
Soit $x_0 \in I$, d'après ce qui précède on peut considérer la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - l| = |F(x_n) - l| \leq C|x_n - l|^2$$

D'où par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, C|x_n - l| \leq (C|x_0 - l|)^{2^n} \leq (\underbrace{C\delta}_{<1})^{2^n}$$

Par conséquent $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ (et on dit que la convergence est d'ordre 2). $\square$

Corollaire. De plus si f est supposé convexe alors l'intervalle $I = [l,b]$ est stable F et pour tout $x_0 \in I$, la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq x_{n+1} - l \leq C(x_n - l)^2$$

Et si $x_0 > l$,

$$x_{n+1} - l \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(l)}{f'(l)}(x_n - l)^2$$

Démonstration.
Etape 1 : I est stable par F
Soit $x \in I$, alors, comme $l \leq x$, $0 = f(l) \leq f(x)$, donc

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$$

Et d'après un calcul précédent,

$$F(x) - l = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-l)^2 \geq 0$$

Donc

$$F(x) \in [l, x] \subset I$$

Etape 2 : Décroissance de la suite récurrente
Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après ce qui précède, $x_{n+1} = F(x_n) \in [l, x_n]$, d'où

$$x_{n+1} \leq x_n$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus si $x_0 = l$ alors la suite est constante égale à l, et si $x_0 > l$ alors la suite est strictement décroissante à partir d'un certain rang car d'après le théorème précédent $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
Etape 3 : Equivalent asymptotique
On suppose que $x_0 > l$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\exists z_n \in \,]l, x_n[, F(x_n) - l = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x_n - l)^2$$

D'où

$$\exists z_n \in \,]l, x_n[, \frac{x_{n+1} - l}{(x_n - l)^2} = \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}$$

Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, donc $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, puis par continuité de f' et f'', quand on passe à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient que

$$\frac{x_{n+1} - l}{(x_n - l)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f''(l)}{2f'(l)}$$

ie

$$x_{n+1} - l \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(l)}{f'(l)}(x_n - l)^2$$

□

Exemple. On peut approcher $\sqrt{y}$, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, zéro positif de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - y \end{array}$$

Avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $a < b$ et $a^2 < y < b^2$.
En effet $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ avec $f' \geq 0$ et $f'' = 2 > 0$.
D'après le théorème on peut donc approcher $\sqrt{y}$ par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [a, b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{x_n^2 - y}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)$$