Exercice.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On suppose que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Montrer que, sous certaine(s) condition(s) à préciser, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Etudier la convergence de la série

$$\sum \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}.$$

Corrigé.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de signe quelconque alors on ne peut pas conclure. Par exemple les séries $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne sont pas de même nature mais les termes sont équivalents.
On suppose donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives. On écrit la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$:

$$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n),$$

i.e., pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$-\varepsilon v_n \leq u_n - v_n \leq \varepsilon v_n,$$

i.e.

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (\varepsilon+1)v_n.$$

Ainsi si $\sum v_n$ est convergente alors, par théorème de comparaison des séries à termes positifs et la dernière inégalité, $\sum u_n$ est convergente. Réciproquement si $\sum u_n$ est convergente alors, d'après l'avant-dernière inégalité, $\sum v_n$ est convergente.

2. On note, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}.$$

Alors

$$|u_n| = \frac{\sqrt{2}\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} =: v_n.$$

Or

$$n^{\frac{5}{4}} v_n = \frac{\sqrt{2}\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v_n$ est convergente puis $\sum u_n$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$ donc convergente.

Exercice. On considère X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement $\{p \mid X\}$.

1. On suppose dans cette question que p divise n. Déterminer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. On considère $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants, i.e. pour tout $i_1, ..., i_r \in [\![1, ..., k]\!]$,
$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$
3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Corrigé.

1. La variable aléatoire X est de loi uniforme, donc
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$
Comme on suppose que $p \mid n$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = \alpha p$, ainsi
$$A_p = \{p \mid X\} = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ k \leq \alpha}} \{X = kp\}.$$
Donc
$$\mathbb{P}(A_p) = \sum_{1 \leq k \leq \alpha} \mathbb{P}(X = kp) = \sum_{1 \leq k \leq \alpha} \frac{1}{n} = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p}.$$
2. Soit $i_1, ..., i_r \in [\![1, k]\!]$, alors, comme les p_{i_j} sont premiers et distincts,
$$A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}} = \bigcap_{j=1}^{r} \{p_{i_j} \mid X\} = \{p_{i_1}...p_{i_r} \mid X\} = A_{p_{i_1}...p_{i_r}}.$$
Ainsi, d'après la question précédente,
$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}...p_{i_r}}) = \frac{1}{p_{i_1}...p_{i_r}} = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}}).$$
Par conséquent les A_{p_j} sont indépendants.
3. On considère l'événement B_n "X est premier avec n". Ainsi, comme X est de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$,
$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{\phi(n)}{n}.$$
Soit $p_1, ..., p_k$ les diviseurs premiers de n, on a alors, pour $l \in \mathbb{N}^*$, $l \in B_n$ si et seulement si $l \leq n$ et l n'est pas multiple d'aucun des p_i pour $i \in [\![1, k]\!]$.
Ainsi
$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_{p_i}^c$$

Or les A_i sont indépendants, donc les A_i^c également, d'où

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{p_i}^c) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

D'où

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Exercice. On considère le plan P et la droite D de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ définis par

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}, D = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = P \oplus D.$$
2. On considère p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P parallèlement à la droite D, et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le vecteur $p(u)$ en fonction de x, y, z et la matrice de l'endomorphisme p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme p est diagonale.

Corrigé.

1. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à P car
$$1 + 2 + 3 = 6 \neq 0.$$
Ainsi
$$P \cap D = \{0\}.$$
De plus
$$\dim(P) + \dim(D) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$
Par conséquent nous avons bien
$$\mathbb{R}^3 = P \oplus D.$$

2. Par définition de la projection, nous avons
$$p(u) \in P, u - p(u) \in D.$$
Ainsi, d'après la seconde appartenance, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$u - p(u) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
i.e.
$$p(u) = \begin{pmatrix} x - \lambda \\ y - 2\lambda \\ z - 3\lambda \end{pmatrix}.$$
Puis, d'après la première appartenance,
$$x + y + z - 6\lambda = 0,$$

i.e.

$$\lambda = \frac{1}{6}(x+y+z).$$

Ainsi

$$p(u) = \begin{pmatrix} x-\lambda \\ y-2\lambda \\ z-3\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5x-y-z \\ 4y-2x-2y \\ 3z-3x-3y \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, en évaluant cette égalité en les vecteurs (e_1, e_2, e_3) de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit

$$\mathrm{Mat}_e(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Etant donné que l'endomorphisme p est une projection vectorielle sur un sous-espace vectoriel de dimension 2 parallèlement à un sous-espace vectoriel de dimension 1, nous savons qu'il existe une base (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}_b(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer de tels vecteurs, il suffit de déterminer deux vecteurs b_1 et b_2 dans la plan P non colinéaires et un vecteur non nul b_3 dans le plan D. Nous pouvons donc choisir par exemple

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice. On considère E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A+B = \{x+y, (x,y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A+B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A+B$ fermé.

Corrigé.

1. On suppose que A est ouvert. Soit $x+y \in A$. Alors $x \in A$ avec A ouvert, donc il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$B(x,\delta) \subset A.$$

Puis

$$B(x,\delta) + \{y\} \subset A+B.$$

Or $B(x,\delta) + \{y\}$ est ouvert car

$$B(x,\delta) + \{y\} = f_y^{-1}(B(x,\delta)),$$

avec $B(x,\delta)$ ouvert de E et $f_y(z) = z - y$ continue. Donc, comme $x+y \in B(x,\delta)+\{y\}$, il existe $\delta' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$B(x+y,\delta') \subset B(x,\delta) + \{y\} \subset A + B.$$

Par conséquent $A+B$ est ouvert. Nous pouvons également le justifier en écrivant

$$A + B = \bigcup_{y \in B} f_y^{-1}(A).$$

2. On suppose que A est compact et B fermé. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (A+B)^{\mathbb{N}}$ tel que

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z \in E.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que

$$z_n = x_n + y_n.$$

Or A est compact, donc il existe une extractrice φ et $x \in A$ tel que

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Ainsi

$$y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z - x.$$

D'où, comme B est fermé, $z - x \in B$, d'où

$$z \in A + B.$$

On en déduit, par caractérisation séquentielle des fermés, que $A+B$ est fermé.

Exercice. Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note les événements

$$\begin{aligned} A_n &= \text{"l'animal est en } A \text{ après son } n\text{-ième trajet"}, \\ B_n &= \text{"l'animal est en } B \text{ après son } n\text{-ième trajet"}, \\ C_n &= \text{"l'animal est en } C \text{ après son } n\text{-ième trajet"}. \end{aligned}$$

On considère également

$$\mathbb{P}(A_n) = a_n, \mathbb{P}(B_n) = b_n, \mathbb{P}(C_n) = c_n$$

.

1. Déterminer la relation entre a_{n+1} et a_n, b_n, c_n. Faire de même avec entre b_{n+1} et a_n, b_n, c_n, et entre c_{n+1} et a_n, b_n, c_n.
2. On considère la matrice A définie par

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Montrer que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de la matrice A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

3. Sans finaliser les calculs, en déduire une expression de a_n, b_n, c_n en fonction de n.

Corrigé.

1. Les événements (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'événements non négligeables de notre problème. Nous avons donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)\mathbb{P}(C_n),$$

   i.e.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

   Nous avons de même

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n,$$

   et

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

2. (a) La matrice A est symétrique réelle, donc, par théorème spectral, elle est diagonalisable.
   (b) Nous avons
   $$A + \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi
   $$\dim\left(A + \frac{1}{2}I_3\right) = 2.$$
   Donc $-\frac{1}{2} \in \mathrm{Sp}(A)$ et
   $$E_{-\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$
   (c) La matrice A est stochastique (les sommes des coefficients par ligne sont égales à 1), donc 1 est valeur propre de la matrice. Nous pouvons également le justifier par
   $$0 = \mathrm{tr}(A) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \lambda,$$
   avec λ la dernière valeur propre de la matrice A. De nous avons
   $$E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Par conséquent nous avons
   $$A = PDP^{-1},$$
   avec
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$
3. Nous pouvons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice. On considère E un espace préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme de E symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Corrigé.

1. L'endomorphisme u est symétrique, donc, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Ainsi, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associés,

$$0 = tr(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(e_i) \rangle,$$

   la dernière égalité étant justifiée par

$$\langle e_i, u(e_i) \rangle = \langle e_i, \lambda e_i \rangle = \lambda_i.$$

   Ainsi, en considérant $x = \sum_{j=1}^{n} e_j$, on obtient

$$\langle u(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \sum_{j=1}^{n} u(e_i), e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0,$$

   avec $x = \sum_{j=1}^{n} e_j \neq 0$ car la famille est libre.

2. On raisonne par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour $n = 1$ le résultat est clair.
   On suppose le résultat vrai au rang $n - 1$ pour $n \geq 2$. On considère

$$y = \frac{x}{\|x\|}, F = Vect(y), G = F^{\perp}.$$

   Or $dim(G) = n - 1$, donc il existe une base orthonormée $(y_2, ..., y_n)$ de G. Or, d'après la question précédente,

$$\langle u(y), y \rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle u(x), x \rangle = 0.$$

   Ainsi $u(y) \in F^{\perp} = G$ et la matrice symétrique de u dans la base $(y, y_2, ..., y_n)$ s'écrit

$$\mathrm{Mat}_y(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix},$$

   avec $B \in S_{n-1}(\mathbb{R})$.
   On considère v l'endomorphisme sur G dont la matrice dans la base $(y_2, ..., y_n)$ est donnée par B. Alors v est symétrique et

$$\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(u) - 0 = 0.$$

   Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée de G dans laquelle la matrice de v est de coefficients diagonaux nuls. Par conséquent en concaténant y avec cette base, on obtient une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale de coefficients diagonaux nuls.