Exercice. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\varphi_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$

1. Montrer que, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$\varphi_k(n) = \binom{n}{k}.$$

2. On considère, pour $n \in [\![0,N]\!]$, $j \in [\![0,N]\!]$ et $u \in \mathbb{R}$,

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\varphi_k(X)\varphi_{n-k}(N-X), \quad f_j(u) = \sum_{n=0}^{N} P_n(j)u^n.$$

Montrer que

$$f_j(u) = (1-u)^j(1+u)^{N-j}.$$

3. On considère, pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(u,v) = \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j} f_j(u)f_j(v).$$

Montrer que

$$F(u,v) = 2^N(1+uv)^N.$$

4. Soit $(a,b) \in [\![0,N]\!]^2$. Montrer que

$$\frac{\partial^{a+b}F}{\partial u^a \partial v^b}(0,0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \neq b \\ 2^N\dfrac{N!a!}{(N-a)!} & \text{si} \quad a = b. \end{cases}$$

5. En déduire que $(P_k)_{0\leq k\leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus N, pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$ défini par

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}P(j)Q(j), \quad (P,Q) \in (\mathbb{R}_N[X])^2.$$

Exercice. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$.

1. Soit $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes. Montrer que $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $M_p(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de taille p est dense dans $M_p(\mathbb{C})$.
3. Le résultat précédent est-il valable avec $\mathbb{R}$?
4. Déterminer l'adhérence des matrices réelles diagonalisables de taille p dans $M_p(\mathbb{R})$.

Exercices supplémentaires

Exercice. Soit X_n, Y_n deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. On considère les variables aléatoires Z_n et T_n définies par

$$Z_n = |X_n - Y_n|, T_n = \min(X_n, Y_n).$$

1. Déterminer $\mathbb{E}(Z_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer $\mathbb{E}(T_n)$ puis en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice. On considère X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement $\{p \mid X\}$.

1. On suppose dans cette question que p divise n. Déterminer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. On considère $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants, i.e. pour tout $i_1, ..., i_r \in [\![1, ..., k]\!]$,

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$

3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$