Réduction dans $O_n(\mathbb{R})$

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre de Xavier Gourdon

Leçons.

1. 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$, applications
2. 150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices
3. 151 Dimension d'un espace vectoriel (en dimension finie), rang, exemples et applications
4. 154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finis, applications
5. 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie
6. 160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)
7. 161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien
8. 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Lemme. Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$ et F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration.
Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$.
Or $u \in O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, en pariculier u est injectif, d'où $u_{|F}$ est injective, donc $u_{|F} \in GL(F)$ car $dim(F) < +\infty$ et car F est u-stable, en particulier $u_{|F} : F \longrightarrow F$ surjectif.
Donc il existe $z \in F$ tel que $u(z) = y$, ainsi, comme $x \in F^\perp$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle = \langle x, z\rangle = 0$$

D'où $u(x) \in F^\perp$, ce qui montre que $F^\perp$ est u-stable. $\square$

Théorême. Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$, alors il existe une base orthonormée b de E, $(r, x) \in \mathbb{N}^2$, $(\theta_1, ..., \theta_r) \in \,]0, \pi[^r$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_s) \in \{-1, 1\}^s$ tel que

$$Mat_b(u) = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

avec $\forall i \in [\![1,r]\!], R(\theta_i) = \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i) \end{pmatrix}$.

Démonstration.

On raisonne par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- Pour $n = 1$: Soit $u \in O_1(\mathbb{R}) \subset GL_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$, alors $u = \lambda id_{\mathbb{R}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
  Or $\varepsilon := det(u) \in \{-1, 1\}$, donc, avec $e = 1 \in \mathbb{R}$, $Mat_e(u) = (\varepsilon)$.
- Pour $n = 2$: Soit $u \in O_2(\mathbb{R})$.
  On considère, pour b base orthonormée de $\mathbb{R}^2$,
  $$N = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} := Mat_b(u)$$
  Or $u \in O_2(\mathbb{R})$, donc $N^tN = I_n = {}^tNN$, on en déduit
  $$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 = 1, ab + cd = 0$$
  D'où, avec la première égalité, $c = \pm b$.
  Si $c = -b$ alors N est symétrique et, d'après le théorème spectral, u est orthodiagonalisable de valeurs propres possibles $1, -1$.
  Si $c = -b \neq 0$ alors $d = a$.
  De plus, comme $a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $a = cos(\theta), b = sin(\theta)$.
  Finalement $N = R(\theta)$.
- Soit $n \geq 2$ et on suppose le résultat vrai dans $O_{n-1}(\mathbb{R})$ et $O_{n-2}(\mathbb{R})$.
  Distinguons deux cas :
  - <u>Cas 1 : Si u admet au moins une valeur propre réelle λ</u>
    Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre normé associé, alors
    $$\|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$
    D'où, comme $\|x\| \neq 0$, $|\lambda| = 1$ ie $\lambda \in \{-1, 1\}$.
    Or $Vect(x)$ est stable par u, donc, d'après le lemme précédent, $H = Vect(x)^\perp$ est stable par u et $dim(H) = n - 1$.
    D'où, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée b' de H tel que $Mat_{b'}(u_{|H})$ soit de la forme voulue.
    Donc, pour $b = (x, b')$, on a
    $$Mat_b(u) = \begin{pmatrix} \lambda & (0) \\ (0) & Mat_{b'}(u_{|H}) \end{pmatrix}$$
    Ce qui est de la forme voulue.
  - <u>Cas 2 : Si u n'admet pas de valeur propre réelle</u>
    On considère
    $$v = u + u^*$$
    avec $u^* = u^{-1}$ l'endomorphisme adjoint u.
    Alors $v^* = (u + u^*)^* = u^* + u = v$, d'où $v \in S_n(\mathbb{R})$.

Donc v admet une valeur propre réelle λ et un vecteur propre associé $x \in \mathbb{R}^n$.
D'où
$$(u + u^*)(x) = \lambda x$$
Ainsi
$$u^2(x) = u(u(x)) = u(v(x) - u^*(x)) = \lambda u(x) - x$$
Par ailleurs $(x, u(x))$ est libre car u sans valeurs propres réelles.
Soit $F = Vect(x, u(x))$, alors $dim(F) = 2$ et F est stable par u.
Or $u_{|F} \in O(F)$ sans valeur propre réelle, donc, d'après l'étape $n = 2$, il existe une base orthonormée b' de F et $\theta \in]0, \pi[$ tels que
$$Mat_{b'}(u_{|F}) = R(\theta)$$
Puis, d'après le lemme précédent, $F^\perp$ est stable par u.
Or $dim(F^\perp) = n - 2$ et $u_{|F^\perp} \in O(F^\perp)$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée b'' de $F^\perp$ tel que $Mat_{b''}(u_{|F^\perp})$ soit de la forme voulue.
Ainsi, dans la base orthonormée $b = (b', b'')$,
$$Mat_b(u) = \begin{pmatrix} Mat_{b'}(u_{|F}) & (0) \\ (0) & Mat_{b''}(u_{|F^\perp}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\theta) & (0) \\ (0) & Mat_{b''}(u_{|F^\perp}) \end{pmatrix}$$
$\square$