Théorème de Riesz-Fischer

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Calcul intégral de Jacques Faraut

Leçons.

1. 201 Espaces de fonctions, exemples et applications
2. 205 Espaces complets, exemples et applications
3. 234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Lemme. Soit $p \in [1, +\infty[$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$$

Alors la série $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge presque partout, appartient à L^p et vérifie

$$\lim_{N\to+\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_n - F \right\|_p = 0$$

Démonstration.
On considère, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $G_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$, $M = \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$ et $G = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$.
Donc, d'après l'inégalité de Minkoswky,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \|G_N\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p \leq M$$

De plus $(G_N^p)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonctions convergeant vers G, donc, d'après le théorème de convergence monotone

$$\int_\Omega G^p d\mu = \int_\Omega \lim_{N\to+\infty} (G_N^p) d\mu = \lim_{N\to+\infty} \left(\int_\Omega G_N^p d\mu \right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\|G_N\|_p^p \right) \leq M^p < +\infty$$

Ainsi $G^p \in L^1$, en particulier G est finie presque partout.
Par conséquent la série $F = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge presque partout (car $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ sont complets).

On considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $F_N = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n$ convergeant simplement vers F presque partout.
Or $|F_N|^p \leq G^p \in L^1$, d'où, par théorème de convergence dominée

$$F^p \in L^1 \text{ ie } F \in L^p$$

Et

$$\underset{N \to +\infty}{lim} \left(\int_\Omega |F_N - F|^p d\mu \right) = 0$$

Ainsi la série $F = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge presque partout et dans L^p. □

Théorême. Soit $p \in [1, +\infty]$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, alors L^p est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Démonstration.
Etape 1 : Cas où $p \in [1, +\infty[$
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ de Cauchy, alors on construit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n, m \leq n_k, \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

En effet, pour $k = 1$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, m \leq n_1, \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^1}$$

Puis si on suppose construit $(n_1, ..., n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ croissant, alors la suite $(f_n)_{n\geq n_k}$ est de Cauchy, donc il existe $n_{k+1} \geq n_k$ tel que

$$\forall n, m \geq n_{k+1}, \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 < +\infty$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p < +\infty$$

D'où, d'après le lemme précédent, la série $F = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ converge μ-presque partout et dans L^p.
Or

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_{n+1}} - f_{n_1}$$

D'où la suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans L^p et μ-presque partout vers une fonction $f \in L^p$.
Ainsi pour tout ε, il existe $(N_1, N_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq N_1 \Rightarrow \|f_{n_k} - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Et

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \geq N_2, n \geq N_2 \Rightarrow \|f_m - f_n\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, k \geq max(N_1, N_2) \Rightarrow \|f_k - f\|_p \leq \|f_k - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

D'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans L^p.
Par conséquent L^p est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$.
Etape 2 : Cas où $p = +\infty$
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^\infty)^{\mathbb{N}}$ de Cauchy, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \geq N_k, n \geq N_k \Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

Donc

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \geq N_k, n \geq N_k \Rightarrow \exists E_{m,n} \in \mathcal{A}, \mu(E_{m,n}) = 0, \forall x \in \Omega \backslash E_{m,n}, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

On considère $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup\limits_{m,n\geq N_k} E_{m,n} \in \mathcal{A}$, alors

$$\forall x \in \Omega \backslash E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall m,n \geq N_k, x \in \Omega \backslash E_{m,n}$$

Donc

$$\forall x \in \Omega \backslash E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall m,n \geq N_k, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

D'où pour tout $x \in \Omega \backslash E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, donc il existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Ainsi en faisant tendre m vers $+\infty$ dans une inégalité précédente, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k \Rightarrow \forall x \in \Omega \backslash E, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

Or $\mu(E) \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \mu(E_k) = 0$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_k \Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

D'où $f \in L^\infty$ et $f_n \overset{L^\infty}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$, ce qui montre que L^∞ est complet, ie un espace de Banach. $\square$

Remarque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ convergent dans L^p vers $f \in L^p$, alors il existe une extractrice φ tel que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers f.