

Chapitre 3

Equations

3.1 Ensemble des solutions d'une équation

Definition 3.1 - Equation

Une équation est une égalité de la forme $A(x) = B(x)$, où A et B sont des fonctions données. x est appelée l'inconnue.

Résoudre l'équation consiste à déterminer x telle que l'égalité soit vérifiée. On dit que l'on a trouvé l'ensemble des solutions de l'équation. On note S cet ensemble des solutions.

Exemple 3.2.

- i) L'équation $3x = 0$ admet 0 pour seule solution, on a $S = \{0\}$.
- ii) L'équation $3x = 3x + 1$ n'admet pas de solution, on a $S = \emptyset$.
- iii) L'équation $3x = 3x$ admet tout réel x pour solution, on a $S = \mathbb{R}$.

Remarque 3.3.

On peut noter que l'ensemble des solutions ne contient pas systématiquement un élément, il peut en contenir plusieurs (voire une infinité, comme c'est le cas avec l'ensemble des réels dans l'exemple précédent) ou bien aucun (on dit que c'est l'ensemble vide).

3.2 Résolution d'équation

3.2.1 Équation linéaire

Théorème 3.4 - Équation linéaire

Soient a, b, c, d quatre nombres réels. On considère l'équation

$$ax + b = cx + d$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- i) Si $a \neq c$, alors l'équation admet une unique solution et $S = \left\{ \frac{d-b}{a-c} \right\}$.
- ii) Si $a = c$ et $b = d$, alors l'équation admet une infinité de solutions et $S = \mathbb{R}$.
- iii) Si $a = c$ et $b \neq d$, alors l'équation n'admet pas de solution et $S = \emptyset$.

Propriété 3.5 -

Si on veut résoudre l'équation $ax + b = 0$, avec a non nul et b un réel, alors on a une unique solution, égale à $-\frac{b}{a}$.

Exemple 3.6.

Résolvons les équations suivantes

i) $2x + 2 = x + 1$

ii) $3x + 2 = 3x + 1$

iii) $\frac{5}{2}x + 1 = 0$

3.2.2 Equation produit

Théorème 3.7 - Equation produit - Deux équations linéaires

Soient a, b, c, d quatre nombres réels. On considère l'équation

$$(ax + b)(cx + d) = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. x est solution de cette équation si et seulement si $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

△ Attention !!! - Ne pas développer

Lorsque nous avons une équation produit (forme factorisée), ne pas développer.

Remarque 3.8.

Les deux équations $ax + b$ et $cx + d$ peuvent être équivalentes, donnant potentiellement une unique solution à l'équation de base.

Exemple 3.9.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

i) $(x - 3)(2x + 5) = 0$

ii) $(x - 3)(2x - 6) = 0$

3.2.3 Equation quotient

Théorème 3.10 - Equation quotient - Deux équations linéaires

Soient a, b, c, d quatre nombres réels avec c non nul. On considère l'équation

$$\frac{ax + b}{cx + d} = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ telle que $x \neq -\frac{d}{c}$. x est solution de cette équation si et seulement si $ax + b = 0$.

Remarque 3.11.

On dit que $-\frac{d}{c}$ est une valeur interdite.

Exemple 3.12.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, en précisant la valeur interdite à chaque fois.

i) $\frac{x - 3}{2x + 5} = 0$

ii) $\frac{x - 3}{x - 3} = 0$