

# Chapitre 6

## Fonctions

### 6.1 Définition et vocabulaire

#### 6.1.1 Introduction

##### Exemple 6.1.

Dans un parc d'attractions, on propose une formule permettant de payer un tarif réduit pour les attractions. L'achat de l'abonnement coûte 10€ et l'entrée d'une attraction coûte 5€.

Compléter le tableau suivant:

| Nombre d'attractions | Prix (€) |
|----------------------|----------|
| 1                    |          |
| 2                    |          |
| 5                    |          |
| 10                   |          |
| $x$                  |          |

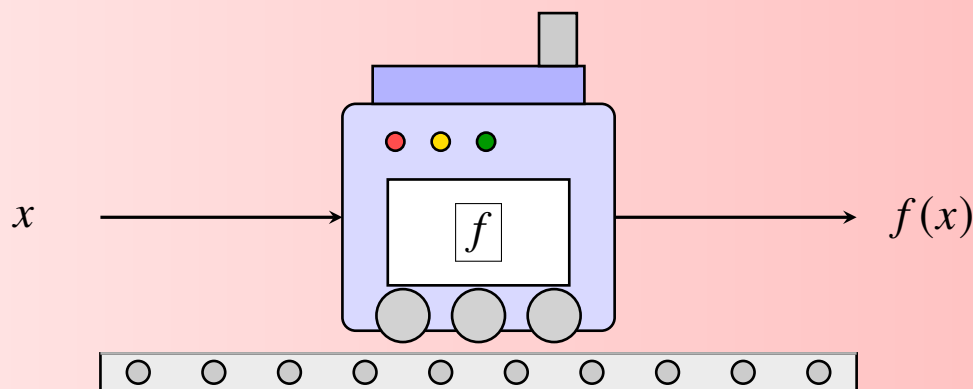
La correspondance entre  $x$  et  $10 + 5x$  peut être appelée  $f$ , on note

$$f : x \mapsto 10 + 5x.$$

## 6.1.2 Définition d'une fonction

### Definition 6.2 -

Une **fonction** est une "machine" mathématique qui, à un nombre donné  $x$ , fait correspondre un autre nombre. Si cette fonction s'appelle  $f$ . On le note  $f(x)$  et on le prononce " $f$  de  $x$ ".



**Machine = Fonction  $f$**

### Exemple 6.3.

- i) Dans l'exemple précédent, l'opération qui donne le prix en fonction du nombre de places dans le parc d'attraction est donc la fonction  $f : x \mapsto 10 + 5x$ . On peut donc écrire  $f(x) = 10 + 5x$ . En particulier, on a  $f : 1 \mapsto 15$  et  $f : 5 \mapsto 35$ . On peut donc écrire  $f(1) = 15$  et  $f(5) = 35$ .
- ii) Si une fonction  $f$  prend en entrée un nombre réel  $x$ , et rend en sortie son carré, comment écrire  $f$  ?

### Remarque 6.4.

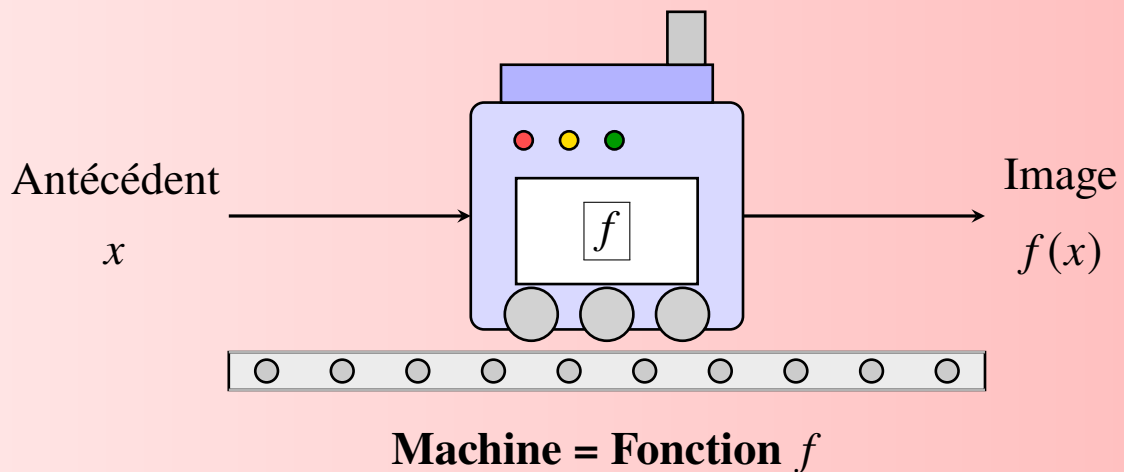
Une fonction donne un seul résultat possible lorsqu'elle est appliquée à un nombre, mais plusieurs nombres peuvent donner le même résultat.

### 6.1.3 Image et antécédent

#### Definition 6.5 -

L'entrée  $x$  s'appelle l'**antécédent**. La sortie  $f(x)$  s'appelle l'**image**. On dit que:

- i) L'image de  $x$  par  $f$  est  $f(x)$ .
- ii)  $x$  est un antécédent de  $f(x)$  par  $f$ .



#### Exemple 6.6.

- i) Si on considère la fonction introduite au début du chapitre  $f : x \mapsto 10 + 5x$ , quelle-est l'image de 1 par  $f$  ? Donner un antécédent de 60 par  $f$ .
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- ii) Si on considère la fonction  $f : x \mapsto x^2$ , quelle-est l'image de 3 par  $f$  ? Trouver deux antécédents de 9 par  $f$

### 6.1.4 Tableau de valeurs

#### Definition 6.7 -

Un tableau de valeurs permet de regrouper, dans une première ligne, différentes valeurs de la variable de départ  $x$ . Dans une seconde ligne, ce tableau regroupe les valeurs prises par  $f$  sur les valeurs de  $x$  correspondantes.

#### Méthode 6.8 -

Concrètement, on a:

|       |                                   |         |                                   |
|-------|-----------------------------------|---------|-----------------------------------|
| $x$   | Première valeur de $x$            | $\dots$ | Dernière valeur de $x$            |
| $(x)$ | $f(\text{Première valeur de } x)$ | $\dots$ | $f(\text{Dernière valeur de } x)$ |

#### Exemple 6.9.

- i) Pour la fonction  $f : x \mapsto 10 + 5x$ , on peut résumer les différentes valeurs testées en introduction

|        |   |   |   |    |
|--------|---|---|---|----|
| $x$    | 1 | 2 | 5 | 10 |
| $f(x)$ |   |   |   |    |

- ii) Pour la fonction  $f : x \mapsto x^2$ , compléter le tableau de valeurs:

|        |    |    |    |   |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $f(x)$ |    |    |    |   |   |   |   |   |

- iii) Pour la fonction  $f : x \mapsto 3x + \frac{1}{2}$ , compléter le tableau de valeurs:

|        |                |                |                |   |   |   |                |    |
|--------|----------------|----------------|----------------|---|---|---|----------------|----|
| $x$    | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 1 | 5 | $\frac{20}{3}$ | 10 |
| $f(x)$ |                |                |                |   |   |   |                |    |

### 6.1.5 Ensemble de définition

#### Definition 6.10 -

Le **domaine de définition** d'une fonction  $f$  est l'ensemble des valeurs de départ possibles de  $f$ . On le note  $\mathcal{D}_f$ .

---

### Exemple 6.11.

- i) Pour la fonction  $f : x \mapsto 10 + 5x$  donnant le prix en fonction du nombre de places au parc d'attraction, on a
  
- ii) Pour la fonction  $f : x \mapsto x^2$ , on a
  
- iii) Si on achète du carburant vendu à 2€ le litre, en notant  $f$  la fonction qui donne le prix payé en fonction du nombre de litres de carburant  $x$  achetés, on a  $f : x \mapsto 2x$  et

## 6.2 Courbe représentative

### Definition 6.12 -

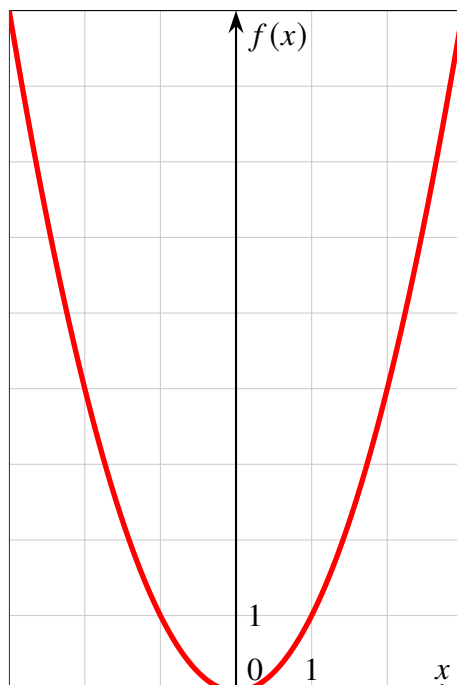
Soit  $f$  une fonction. On appelle **courbe représentative de  $f$**  l'ensemble des points de coordonnées  $(x, f(x))$  pour tout élément  $x$  d'une partie de  $\mathcal{D}_f$ .

On dit alors que  $y = f(x)$  est **l'équation de la courbe**.

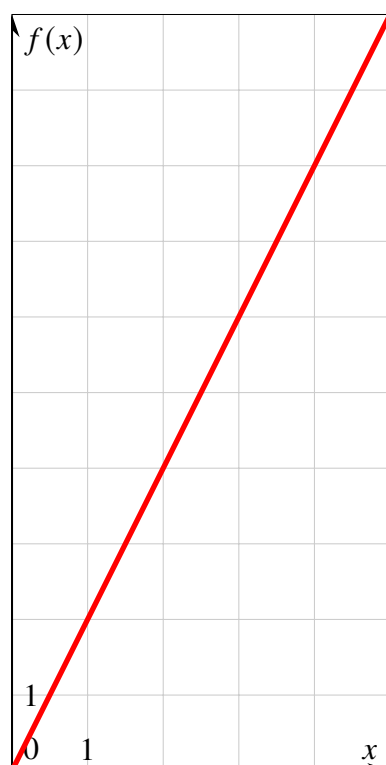
---

**Exemple 6.13.**

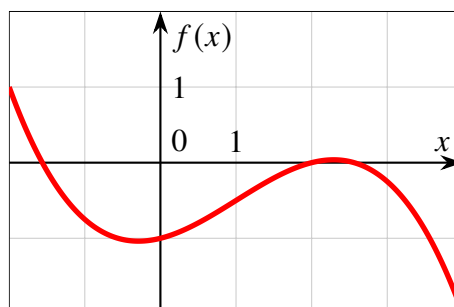
- i) On représente graphiquement la fonction  $f : x \mapsto x^2$  sur l'intervalle  $[-3, 3]$ . L'équation de la courbe est  $y = x^2$ .



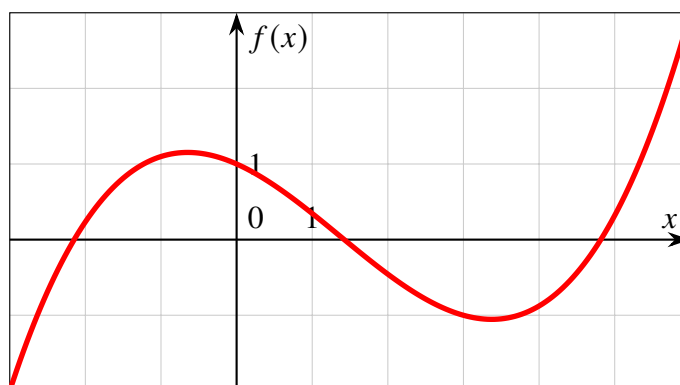
- ii) Concernant la fonction  $x \mapsto 2x$  donnant le prix payé en fonction du nombre de litres de carburant, on peut choisir de la représenter sur l'intervalle  $[0, 5]$ . L'équation de la courbe est  $y = 2x$ .



iii) On peut aussi connaître la courbe représentative d'une fonction sans connaître l'expression de cette fonction



iv) Même chose sur ce graphique



## 6.3 Résolution d'équations ou d'inéquations

### 6.3.1 Résolution algébrique d'équations

**Definition 6.14 -**

Si  $f$  est une fonction et  $k$  est un nombre réel, **résoudre de manière algébrique l'équation**  $f(x) = k$  revient à trouver le ou les éventuel.s antécédent.s de  $k$  par  $f$ .

**Méthode 6.15 -**

Dans ce cas de figure, on devra se ramener à un type d'équation que l'on sait déjà résoudre.

---

**Exemple 6.16.**

i) On considère la fonction  $f : x \mapsto 2x + 5$ . On veut résoudre l'équation  $f(x) = \frac{7}{2}$ .

ii) On considère la fonction  $f : x \mapsto (x + 1)^2$ . On veut résoudre l'équation  $f(x) = 1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 6.17 -**

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions, **résoudre de manière algébrique l'équation**  $f(x) = g(x)$  revient à trouver des valeurs de  $x$  donnant la même image par  $f$  et  $g$ .

**Méthode 6.18 -**

Dans ce cas de figure, on devra se ramener à un type d'équation que l'on sait déjà résoudre.

---

**Exemple 6.19.**

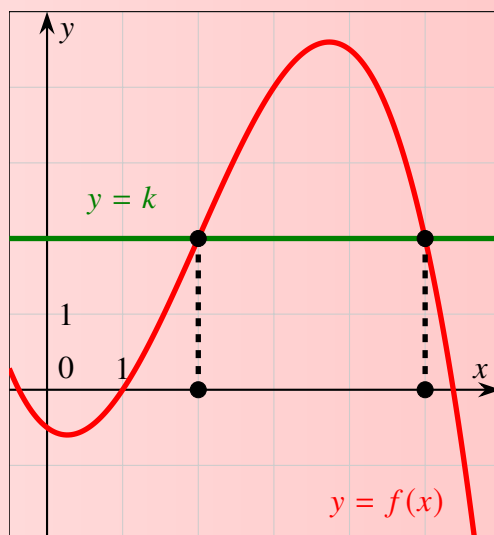
i) On considère les fonction  $f : x \mapsto 2x + 5$  et  $g : x \mapsto 3x - 2$ . On veut résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$ .

ii) On considère les fonctions  $f : x \mapsto (x + 1)(2x + 3)$  et  $g : x \mapsto (2x - 1)(2x + 3)$ . On veut résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 6.3.2 Résolution graphique d'équations

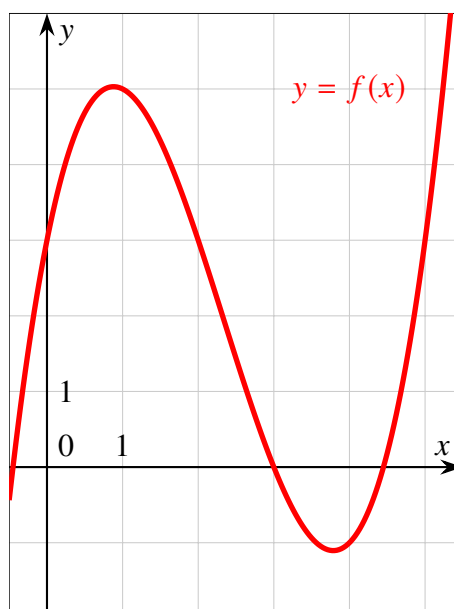
#### Definition 6.20 -

Si  $f$  est une fonction et  $k$  est un nombre réel, **résoudre de manière graphique l'équation  $f(x) = k$**  revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de  $x$  où la courbe représentative de  $f$  croise la droite d'équation  $y = k$ .

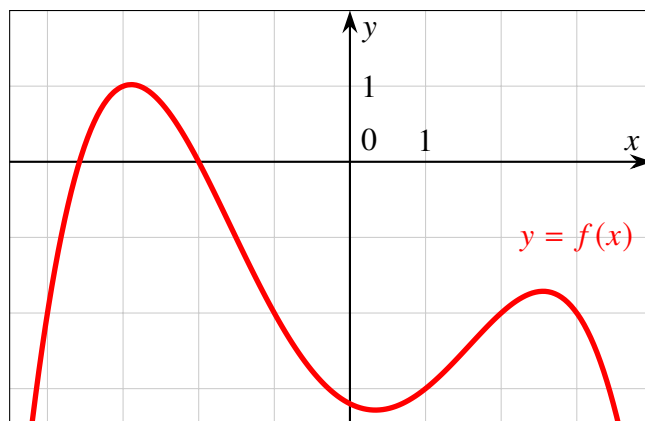


#### Exemple 6.21.

i) On veut résoudre l'équation  $f(x) = 3$  sur ce graphique

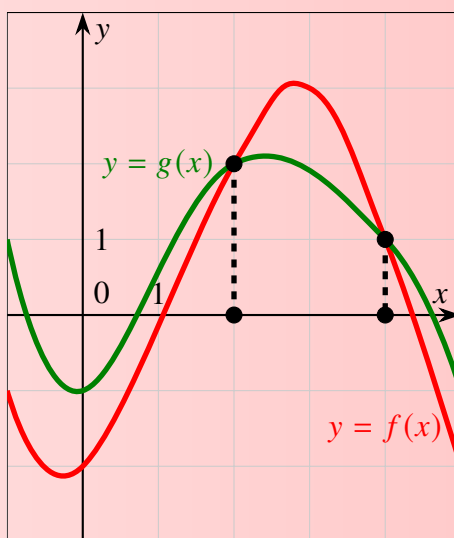


ii) On veut résoudre l'équation  $f(x) = -2$  sur ce graphique



**Definition 6.22 -**

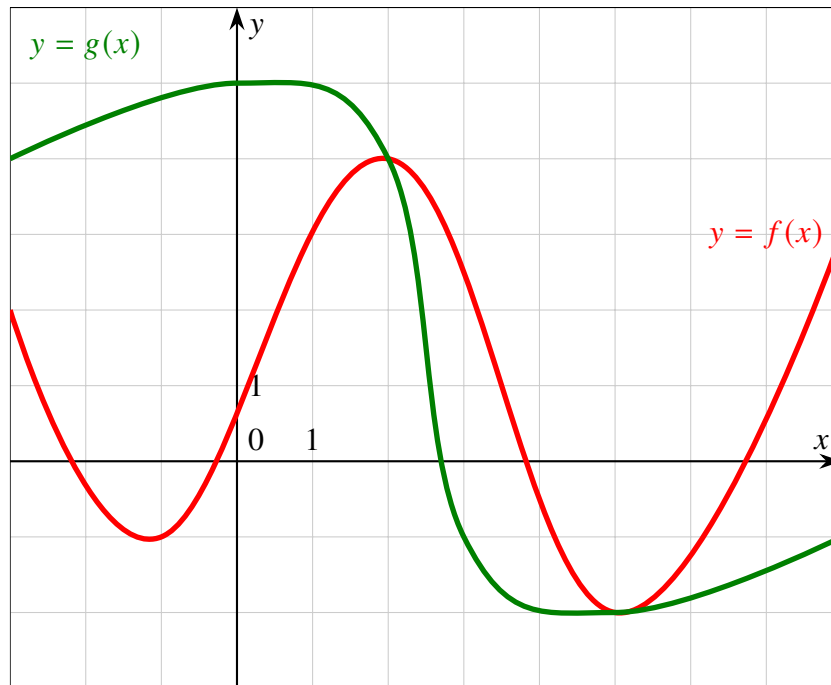
Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions, **résoudre de manière graphique l'équation**  $f(x) = g(x)$  revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de  $x$  où les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  se croisent.



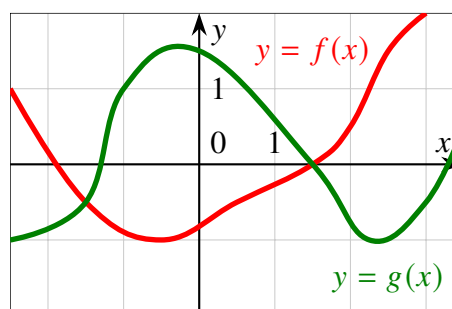
---

**Exemple 6.23.**

i) On veut résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$



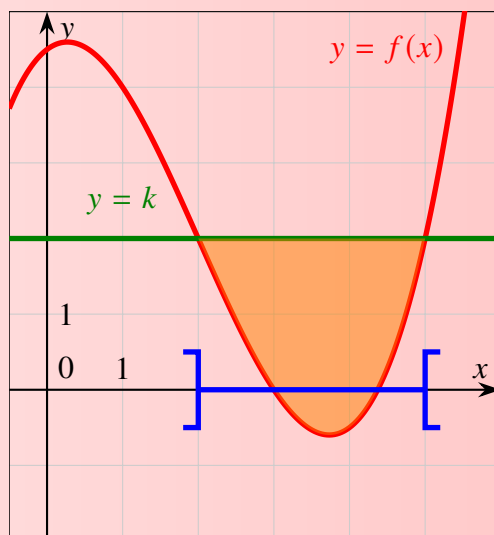
ii) On veut résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$



### 6.3.3 Résolution graphique d'inéquations

Definition 6.24 -

Si  $f$  est une fonction et  $k$  est un nombre réel, **résoudre de manière graphique l'inéquation**  $f(x) < k$  revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de  $x$  où la courbe représentative de  $f$  est strictement sous la droite d'équation  $y = k$ .

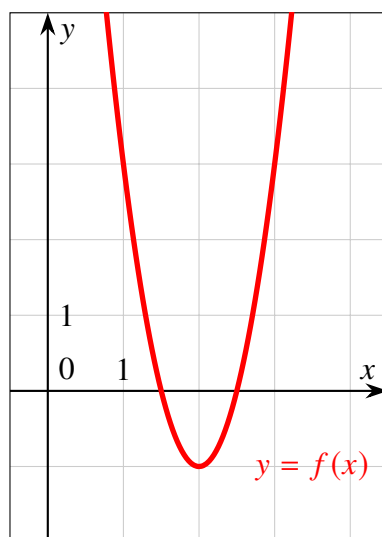


△ Attention !!! -

On ne compte donc pas les valeurs de  $x$  où les courbes se croisent, car ces valeurs ne vérifient pas  $f(x) < k$ .

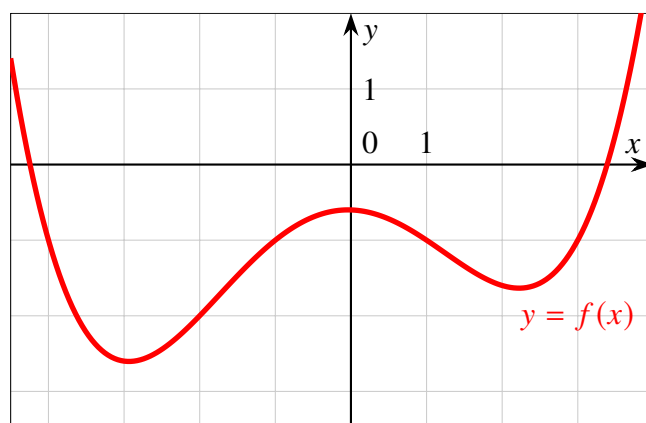
#### Exemple 6.25.

i) On veut résoudre l'inéquation  $f(x) < 3$  sur ce graphique



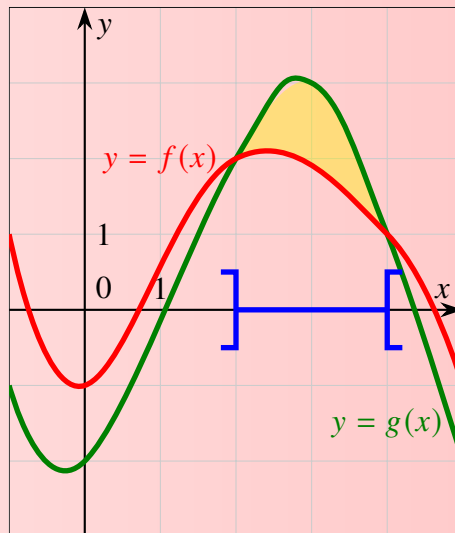
---

ii) On veut résoudre l'équation  $f(x) < -1$  sur ce graphique



Definition 6.26 -

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions, **résoudre de manière graphique l'inéquation**  $f(x) < g(x)$  revient à trouver la ou les éventuelle.s valeur.s de  $x$  où la courbe représentative de  $f$  est strictement sous la courbe représentative de  $g$ .

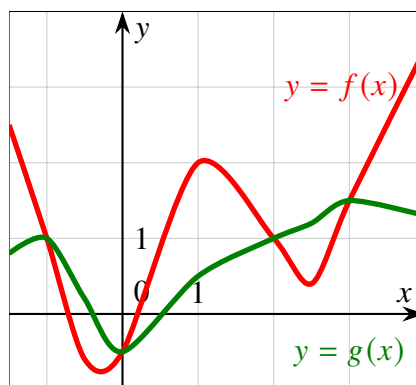


△ Attention !!! -

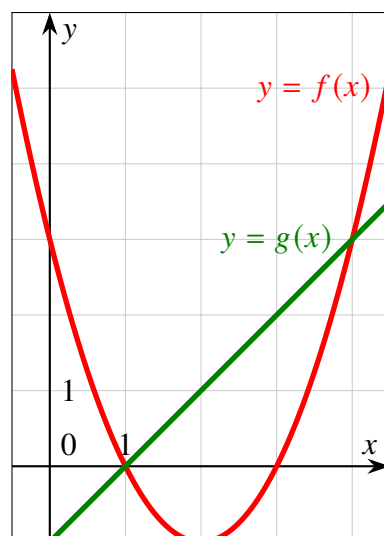
On ne compte donc pas les valeurs de  $x$  où les courbes se croisent, car ces valeurs ne vérifient pas  $f(x) < g(x)$ .

Exemple 6.27.

i) On veut résoudre l'inéquation  $f(x) < g(x)$



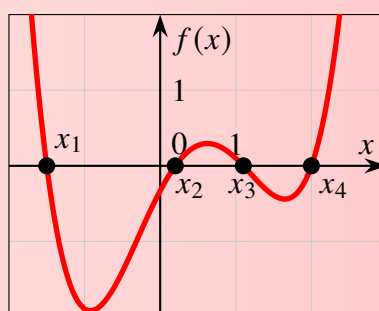
ii) On veut résoudre l'inéquation  $f(x) < g(x)$



## 6.4 Tableau de signe

Definition 6.28 -

Le tableau de signe d'une fonction  $f$  est un tableau qui indique le signe pris par cette fonction: positif, négatif ou nul.



| $x$    | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------|-------|-------|-------|-----------|
| $f(x)$ |           | +     | 0     | -     | 0     | +         |

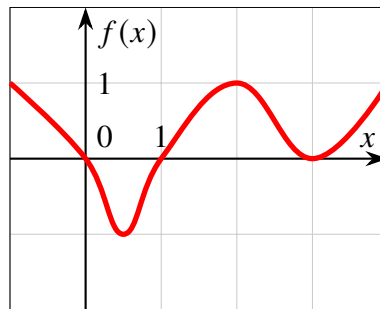
### Méthode 6.29 -

Pour compléter un tableau de signe:

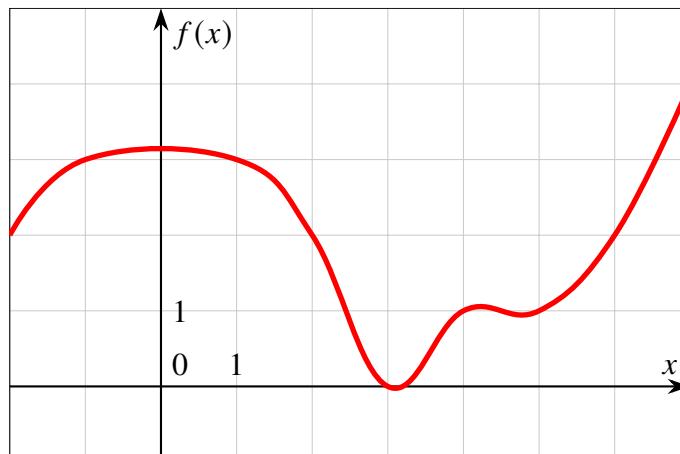
- i) On remplit la première ligne en plaçant les points où  $f$  s'annule.
- ii) On complète la deuxième ligne en mettant un zéro en-dessous des points où  $f$  s'annule, ce qui sépare les colonnes entre elles, puis on complète par "+" où "-" en fonction du signe de  $f$  entre les points d'annulation.

### Exemple 6.30.

- i) Donnons le tableau de signe de cette fonction



- ii) Donnons le tableau de signe de cette fonction



---

## 6.5 Variations

### 6.5.1 Variations d'une fonction

#### Definition 6.31 -

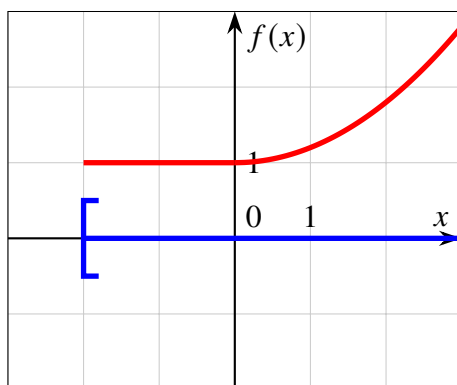
Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction.

- i) On dit que  $f$  est **croissante sur**  $I$  si pour tous réels  $a, b$  de  $I$  tels que  $a \leq b$ ,  $f(a) \leq f(b)$ .
- ii) On dit que  $f$  est **strictement croissante sur**  $I$  si pour tous réels  $a, b$  de  $I$  tels que  $a < b$ ,  $f(a) < f(b)$ .
- iii) On dit que  $f$  est **décroissante sur**  $I$  si pour tous réels  $a, b$  de  $I$  tels que  $a \leq b$ ,  $f(a) \geq f(b)$ .
- iv) On dit que  $f$  est **strictement décroissante sur**  $I$  si pour tous réels  $a, b$  de  $I$  tels que  $a < b$ ,  $f(a) > f(b)$ .

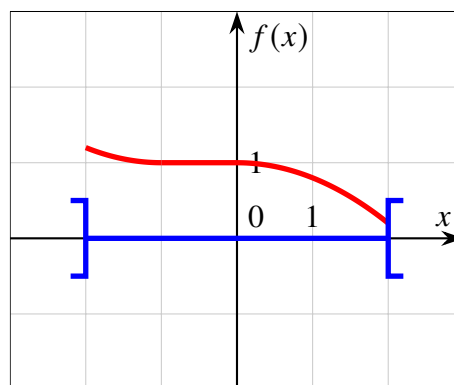
#### Remarque 6.32.

Dans le cas où  $f$  est croissante / décroissante sur  $I$ , on dit que  $f$  est monotone sur  $I$ . Dans le cas où  $f$  est strictement croissante / strictement décroissante sur  $I$ , on dit que  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .

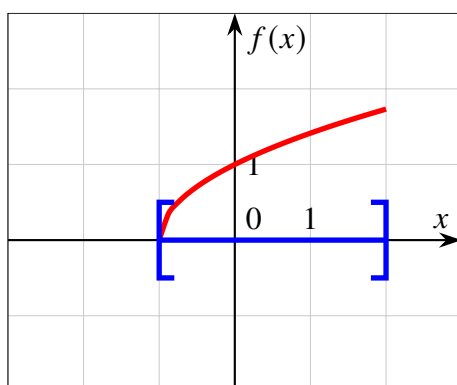
### Exemple 6.33.



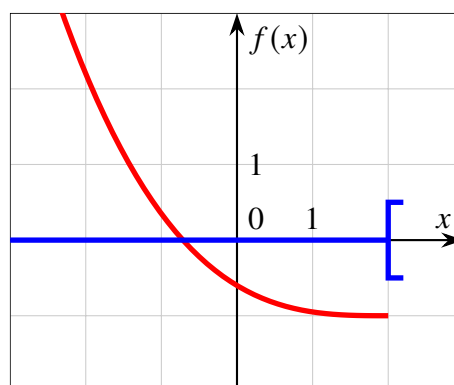
Fonction croissante



Fonction décroissante



Fonction strictement  
croissante

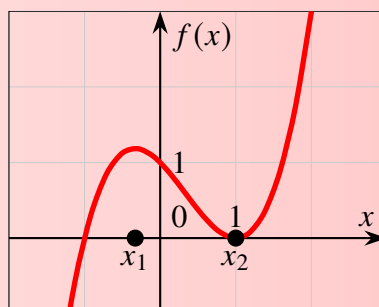


Fonction strictement  
décroissante

## 6.5.2 Tableau de variation

Definition 6.34 -

Un **tableau de variation** d'une fonction  $f$  est un tableau permettant de visualiser les intervalles sur lesquels  $f$  est croissante, décroissante ou constante.



| $x$    | $-\infty$                                  | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|--------|--------------------------------------------|-------|-------|-----------|
| $f(x)$ | $\nearrow f(x_1) \searrow f(x_2) \nearrow$ |       |       |           |

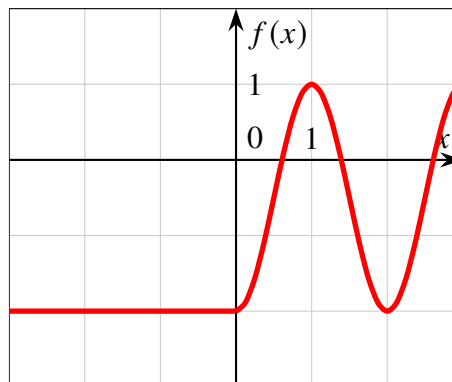
### Méthode 6.35 -

Pour compléter un tableau de variation:

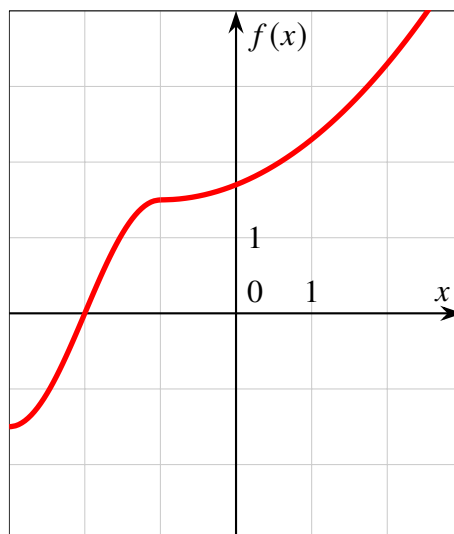
- i) On remplit la première ligne en plaçant les points qui sont les extrémités des intervalles où  $f$  est croissante/décroissante/constante.
- ii) On complète la deuxième ligne en des flèches en fonction du sens de variation de  $f$ .

### Exemple 6.36.

- i) Sur quels intervalles  $f$  est croissante, décroissante, constante ? Dresser le tableau de variations de  $f$ .



- 
- ii) Sur quels intervalles  $f$  est croissante, décroissante, constante ? Dresser le tableau de variations de  $f$ .



### 6.5.3 Extrema

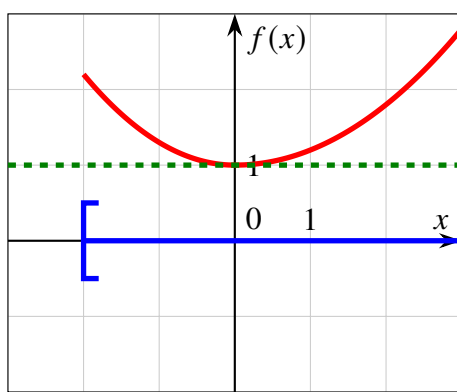
#### Definition 6.37 -

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On dit qu'une fonction  $f$ :

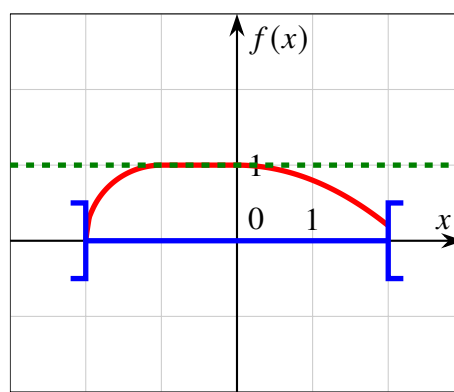
- i) Admet un **minimum** sur  $I$  s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $m \leq f(x)$ .
- ii) Admet un **maximum** sur  $I$  s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $f(x) \leq M$ .

Dans les deux cas, on parle d'**extremum**.

#### Exemple 6.38.



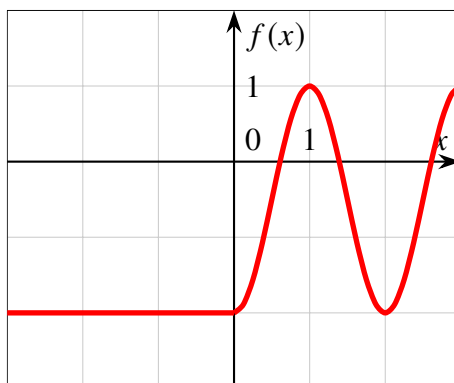
Fonction admettant un minimum



Fonction admettant un maximum

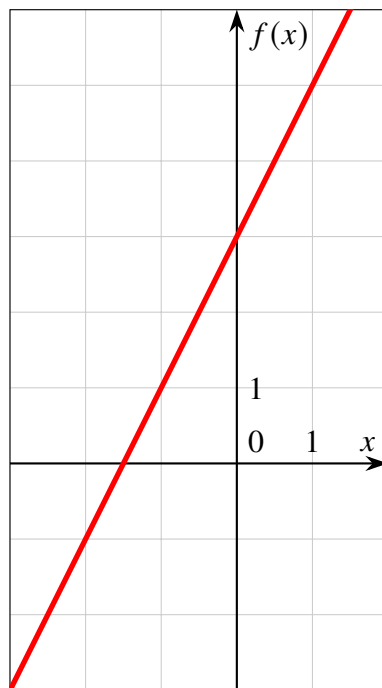
#### Exemple 6.39.

- i) La fonction suivante définie sur l'intervalle  $[-3, 3]$  admet-elle un minimum ? un maximum ?



---

ii) La fonction  $f : x \mapsto 2x + 3$  définie sur  $\mathbb{R}$  admet-elle un minimum ? un maximum ?



---

iii) La fonction suivante définie sur  $\mathbb{R}$  admet-elle un minimum ? un maximum ?

