Théorème du point fixe de Banach-Picard et application à la résolution numérique d'équations différentielles

Le théorème du point fixe de Banach-Picard est un théorème incontournable dès que l'on s'intéresse à la résolution d'équations. Ce théorème énonce que toute application contractante d'un espace métrique complet vers ce même espace admet un unique point fixe.

Le but de ce travail est de comprendre la démonstration de ce résultat et pourquoi chaque hypothèse est impostante au travers de contre-exemples.

Enfin, on pourra s'intérésser à une application à la résolution numérique d'équations différentielles ordinaires, en particulier lorsque l'on utilise des méthodes implicites. Plus précisément, si on considère une équation différentielle autonome

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \tag{1}$$

telle que la solution est définie sur tout temps, alors, considérons un pas de temps $h > 0$ et une approximation de la solution au temps nh, notée y_n. Une première méthode est d'utiliser la méthode d'Euler explicite

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n) \tag{2}$$

Bien qu'élémentaire, cette méthode présente l'inconvénient de ne pas être stable (i.e. la solution approcher peut vite exploser) et de n'être que d'ordre 1 (l'erreur est proportionnelle à h, ce qui est peu précis). Pour corriger ce problème de stabilité, une première approche peut-être d'utiliser une méthode d'Euler Implicite

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}) \tag{3}$$

qui est stable, mais toujours d'ordre 1. Une autre aproche est la méthode de Crank-Nicholson:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(y_n) + f(y_{n+1})\Big] \tag{4}$$

qui est cette fois stable et d'ordre 2 (l'erreur d'approximation est proportionnelle à h^2, ce qui est beaucoup plus précis). Ces méthodes numériques font appel, à chaque itération, à une résolution d'équation, ce qui peut facilement se faire via une méthode de point fixe.

Références

- Berthelin, F. (2017). Équations différentielles. Cassini, pp.312-313, 330-335.

- Rouvière, F. (2009). *Petit guide de calcul différentiel: à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, pp. 135-137.